
Espectroscopia do Charmônio em um Modelo Não Relativístico

Spectroscopy of Charmonium in a Nonrelativistic Model

Manuella Oliveira Rodrigues

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadores Prof.^a Dra. Patrícia Camargo Magalhães (Unicamp) e
Prof. Lucas Aurélio Quitakava Ferreira da Silva (Mestrando Unicamp)

Abstract

This monograph aims to investigate the formation of heavy-quark bound states, with emphasis on the charmonium system ($c\bar{c}$), by solving the Schrödinger equation with the Cornell potential. To this end, a progressive review of fundamental quantum mechanical systems admitting analytical solutions was first carried out. The Schrödinger equation was solved for three different potentials: the infinite square well, the quantum harmonic oscillator, and the hydrogen atom. These studies provide the theoretical and mathematical foundation required for the investigation of more complex systems.

Subsequently, the Schrödinger equation was solved numerically for the charmonium system, composed of a charm quark and its antiquark ($c\bar{c}$), using the Cornell potential. This potential combines a Coulomb-like interaction, dominant at short distances, with a linear confinement term that describes the long-range behavior of the strong interaction between quarks. The numerical solution was obtained using the finite element method implemented in the *NDEigensystem* function of the *Mathematica* software.

Despite the limitations inherent to a non-relativistic treatment, the calculated results show excellent agreement with the available experimental data, demonstrating that the adopted model provides an effective description of the charmonium bound-state spectrum. Finally, possible extensions of the model are discussed, including the incorporation of hyperfine interactions.

Keywords: Charmonium; Cornell potential;

Resumo

Esta monografia tem como propósito investigar a formação de estados ligados de quarks pesados, com ênfase no sistema de charmônio ($c\bar{c}$), a partir da equação de Schrodinger associada ao potencial de Cornell. Para isso, foi feita inicialmente uma revisão gradual de problemas clássicos da Mecânica Quântica que admitem soluções analíticas. A equação de Schrodinger foi resolvida com os diferentes potenciais: o poço de potencial infinito, o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio. Estabelecendo a base teórica e matemática necessária para a abordagem de sistemas mais complexos.

Na sequência, solucionou-se a equação para descrever o charmônio, um sistema composto por um par de quark e antiquark $c\bar{c}$, usando o potencial de Cornell. Esse potencial inclui, além da atração coulombiana entre cargas opostas, um termo que vem da interação mais fundamental entre os quarks. Para isso, foi utilizado o método dos elementos finitos implementado pela função *NDEigensystem* do software Mathematica. Os resultados obtidos, apesar das limitações inerentes à abordagem não relativística, apresentam excelente concordância com dados experimentais disponíveis. Isso indica que o modelo não relativístico é eficaz na descrição da estrutura dos estados ligados de charmônio.

Por fim, são discutidas possíveis extensões do modelo, incluindo a incorporação de interações hiperfinas.

Palavras Chave: Charmônio; Potencial de Cornell;

Agradecimentos

Aos meus pais, Rafael Silva Rodrigues e Valéria Fabrícia de Oliveira, pelo apoio incondicional, por abdicarem dos seus desejos pessoais em prol da realização dos meus sonhos, pelo incentivo constante e compreensão ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Aos meus amigos e familiares, meu sincero agradecimento pela companhia, apoio e pelos momentos de descontração, que foram essenciais para manter o equilíbrio durante este processo.

Aos meus orientadores, Dra. Patrícia Camargo Magalhães e Prof. Lucas Aurélio Quitakava Ferreira da Silva, expresse minha profunda gratidão pela orientação, paciência, dedicação e pelos valiosos ensinamentos, além da grande ajuda para o desenvolvimento e escrita deste trabalho.

Aos tutores, Profs. Drs. André Monteiro Paschoal, Leonardo de Lima e Ricardo D'Elia Matheus, bem como o monitor Prof. Dr. Fabrício Marques do Carmo, por toda a educação e conhecimentos dados durante os anos iniciais desse projeto, agradeço infinitamente por me mostrarem a beleza e grandiosidade do mundo acadêmico.

Ao Instituto Principia e à Escola de Talentos, agradeço pela estrutura oferecida, pelo ambiente acadêmico e pelas oportunidades que contribuíram significativamente para a minha formação. Foi através deste projeto que surgiu e se consolidou minha paixão pela Física, tornando esta experiência ainda mais significativa para o meu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

À minha turma, Gatos Instáveis, que produziram seus próprios projetos, mas em conjunto comigo, a nossa convivência enriquecedora e compartilhamento mútuo de dificuldades e evoluções foi crucial para a construção desse trabalho, agradeço por não desistirem, assim como eu também não desisti.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram direta ou indiretamente para a realização do meu TCC.

Sumário

1	Introdução	1
2	Soluções da Equação de Schrodinger para Sistemas Quânticos	6
2.1	Poço de Potencial Infinito	7
2.2	Oscilador Harmônico Quântico	10
2.3	Solução Analítica do átomo de Hidrogênio	13
2.3.1	A Equação de Schrodinger em coordenadas esféricas	14
2.3.2	Solução Angular e os Harmônicos Esféricos	15
2.3.3	Solução Radial	16
3	Solução Numérica pelo Método dos Elementos Finitos	19
3.1	Solução Numérica do Átomo de Hidrogênio	19
4	Charmônio: um estado ligado $c\bar{c}$	22
4.1	Potencial de Cornell	23
4.2	Solução Numérica do Charmônio	25
4.3	Resultados	26
5	Considerações Finais	32
6	Bibliografia	35

Introdução

A física de partículas é a área que busca compreender os constituintes fundamentais da matéria e suas interações. A teoria moderna (chamada de modelo padrão) busca explicar todos os fenômenos da física de partículas em termos das propriedades e interações das 4 forças fundamentais da natureza que regem o universo [1]. Cada uma dessas forças da natureza (por excessão apenas da gravidade) é mediada por uma partícula, os bósons. Que por essa característica recebem o nome de partículas mensageiras.

Modelo Padrão das Partículas Elementares

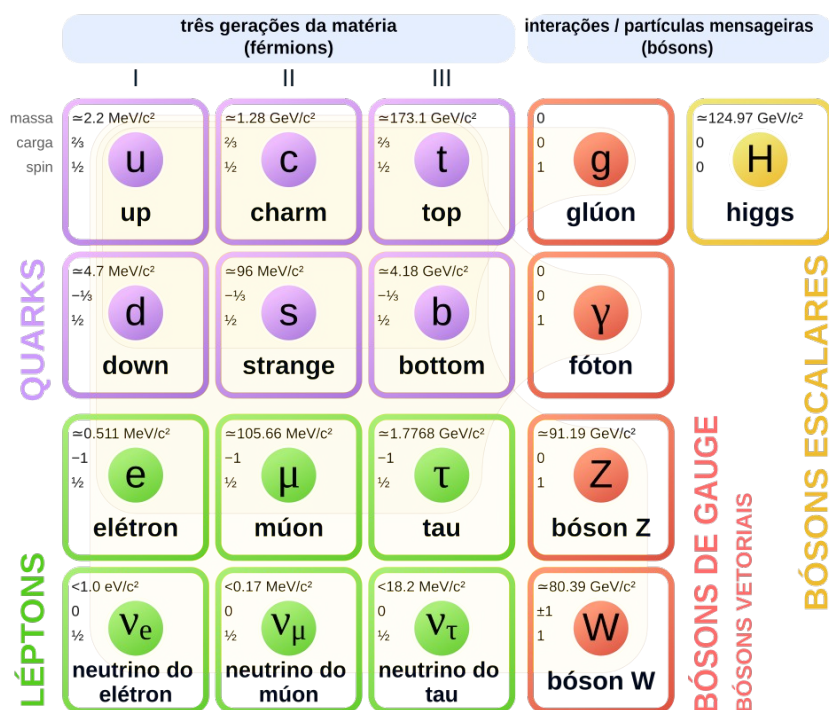


Figura 1.1: O modelo padrão das partículas elementares. Fonte: Wikipedia

A *força eletromagnética*, também chamada de força de Lorentz, atua entre partículas carregadas, como elétrons com carga negativa e prótons com carga positiva. Cargas opostas se atraem, enquanto cargas iguais se repelem. Quanto maior a carga, maior a força. E, apesar de que numa forma muito, muito pequena, essa força pode ser sentida a uma distância infinita. Ela é responsável por alguns dos fenômenos comuns que observamos: atrito, elasticidade, força normal e a força que mantém os

sólidos unidos em uma determinada forma. É até mesmo responsável pela resistência do ar que pássaros e aviões experimentam ao voar [2].

As forças eletromagnéticas são transferidas entre partículas carregadas através da troca de bósons sem massa, portadores de força, chamados fótons (Veja-o na quarta coluna e segunda linha da Fig. 1.1), que também são os componentes particulados da luz [2].

Isaac Newton foi o primeiro a propor a ideia de gravidade, descrevendo-a como uma atração literal entre dois objetos. Séculos depois, Albert Einstein sugeriu, por meio de sua teoria da relatividade geral, que a gravidade não é uma atração ou uma força. Em vez disso, é uma consequência da curvatura do espaço-tempo causada por objetos. Embora a gravidade mantenha unidos planetas, estrelas, sistemas solares e até galáxias, ela se revela a mais fraca das forças fundamentais da natureza, especialmente em escalas moleculares e atômicas [1, 2].

A *interação gravitacional* entre partículas elementares é tão pequena em comparação com as das outras três interações, que pode ser negligenciada nas energias atualmente acessíveis. Por isso, frequentemente nos referimos, na prática, às três forças da natureza. Ela pode ser mediada pelo gráviton, mas isso é ainda uma teoria, por enquanto foi observada experimentalmente apenas a onda gravitacional [2].

A *interação nuclear fraca* é responsável pelo decaimento radioativo da matéria nuclear de partículas, ou seja, a mudança literal de um tipo de partícula subatômica para outra, por meio da troca de bósons W e Z. Como a troca de sabor entre os quarks. [2].

A força fraca é crítica para as reações de fusão nuclear que alimentam o sol e produzem a energia necessária para a maioria das formas de vida aqui na Terra [2].

A *força nuclear forte* é a mais forte das quatro forças fundamentais da natureza. Ela é responsável pela ligação de partículas elementares para formar partículas maiores, como a ligação de 2 quark up e 1 quark down na formação de 1 próton. Essa força é a que mantém nêutrons e prótons juntos dentro de um átomo [2].

Assim como a força fraca, a interação nuclear forte opera apenas quando as partículas subatômicas estão extremamente próximas umas das outras. Uma vez dentro do alcance mínimo, bósons carregados sem massa chamados glúons (Veja-o na primeira linha e quarta coluna da Fig. 1.1) transmitem a força forte entre quarks e os mantêm "colados" juntos. Uma pequena fração da força forte, chamada força forte residual, atua entre prótons e nêutrons. Os prótons no núcleo se repelem por causa de sua carga semelhante, mas a força forte residual pode superar essa repulsão, de modo que as partículas permanecem ligadas no núcleo atômico [1, 2].

Uma das principais características da interação forte é o confinamento, em que o potencial é maior quanto mais distantes estiverem as partículas, e diminui sua potência conforme elas estão mais próximas. Esse fenômeno impede a observação

de quarks livres na natureza, fazendo com que estes existam apenas em estados ligados. O *Potencial de Cornell*, utilizado para descrever a espectroscopia do Charmônio, através da solução radial da equação de Schrodinger independente do tempo, escrita em coordenadas esféricas, apresenta exatamente essa mesma característica [3]. A estrutura matemática e os detalhes deste potencial serão introduzidos em detalhes mais a frente neste trabalho.

Dentre as partículas fundamentais descritas pelo Modelo Padrão, visto na Fig. 1.1, os quarks ocupam papel central na formação da matéria hadrônica (toda partícula formada por quarks), interagindo por meio da interação forte, mediada pelos glúons. Os quarks estão organizados em seis sabores: up, down, strange, charm, bottom e top e combinam-se para formar hádrons, como bárions e mésons [1, 2, 3].

Os quarks pesados despertam especial interesse no estudo da Cromodinâmica Quântica (QCD), principalmente por permitirem a investigação de regimes não perturbativos da interação forte. Nesse contexto, o quark charme destaca-se por sua massa relativamente elevada¹, possibilitando que sistemas formados por pares charme-anticharme sejam descritos, em boa aproximação, por modelos não relativísticos baseados na equação de Schrodinger [3].

Neste trabalho, investiga-se o sistema ligado composto por um quark charme e um antiquark charme, denominado charmônio ($c\bar{c}$). Este apresenta um rico espectro de estados excitados e importantes analogias com sistemas clássicos da Mecânica Quântica, como o átomo de hidrogênio [4].

Dito isso, a equação de Schrodinger desempenha papel fundamental na descrição de sistemas quânticos ligados. A partir da definição de um potencial de interação adequado, a equação permite determinar funções de onda e níveis de energia associados às partículas do sistema, fornecendo informações importantes sobre sua estrutura espectral e propriedades físicas [4].

Problemas clássicos, como o poço de potencial infinito, o oscilador harmônico quântico e o átomo de hidrogênio, constituem exemplos importantes de sistemas em que a equação de Schrodinger pode ser resolvida exatamente, servindo como base conceitual e matemática para o estudo de modelos mais complexos [4].

No caso do charmônio, entretanto, a presença de um potencial efetivo mais sofisticado torna inviável a obtenção de soluções analíticas exatas. Dessa forma, é necessário o emprego de métodos numéricos para a resolução da equação de Schrödinger, possibilitando a determinação aproximada dos níveis de energia e a análise espectroscópica do sistema [3, 4].

O *potencial de Cornell* consiste em uma parametrização efetiva da interação entre um quark e um antiquark, sendo amplamente utilizado na descrição espectroscópica de sistemas de quarks pesados [3, 5]. Sua estrutura é composta pela superposição de dois termos principais que representam propriedades fundamentais da interação forte em diferentes escalas de distância [3].

¹ O quark charme possui massa de aproximadamente 1,27GeV [9], sendo cerca de 250 vezes mais massivo que os quarks up, down e strange ($\sim 2.16\text{MeV}$ [9]). Essa elevada massa faz com que os sistemas $c\bar{c}$ apresentem velocidades relativamente menores, tornando a aproximação não relativística uma descrição bastante eficaz para o estudo de sua espectroscopia.

O primeiro deles corresponde a um *termo Coulombiano*, dominante em regimes de curta distância, associado à troca de um único glúon entre o quark e o antiquark. Nessa região, a interação apresenta comportamento semelhante ao potencial eletrostático de Coulomb, variando inversamente com a distância entre as partículas (Veja o efeito na Fig. 1.2) [3, 8].

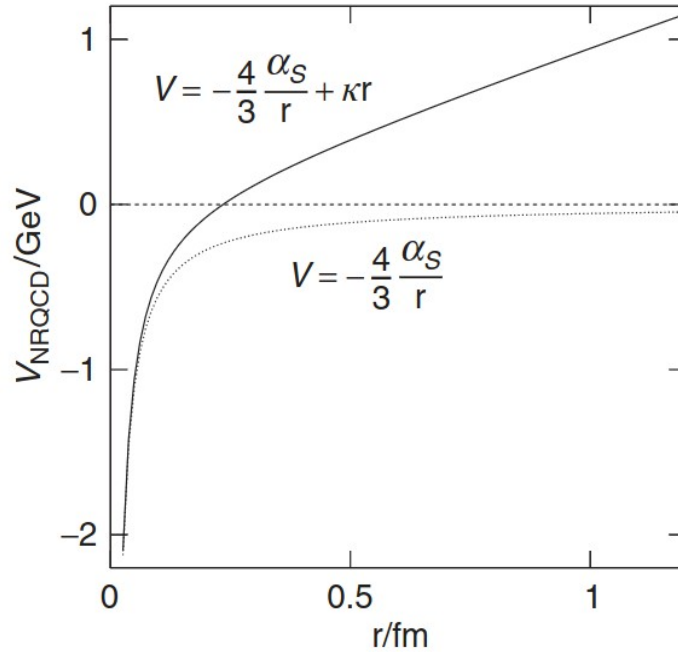


Figura 1.2: A forma aproximada do potencial QCD não relativístico para um estado $q\bar{q}$ ligado, assumindo $\alpha_s = 0.2$ e $k = 1 \text{ GeV/fm}$. Fonte: [8]

O segundo termo é linear em relação à distância e torna-se dominante em grandes separações. Esse termo está diretamente associado ao confinamento de quarks, descrevendo o aumento aproximadamente linear da energia potencial necessária para separar o par $q\bar{q}$, como representado na Fig. 1.2 [3, 8].

A combinação entre os termos permite que o potencial de Cornell reproduza, de forma satisfatória, características importantes da QCD não perturbativa, tornando-o particularmente eficiente na descrição de estados ligados de quarks pesados, como o charmônio [3, 4, 5, 8].

O presente trabalho tem como principal objetivo investigar a formação de estados ligados e a espectroscopia do sistema de charmônio, utilizando o potencial de Cornell como modelo efetivo da interação forte. Para isso, foi realizada a resolução numérica da equação radial de Schrodinger, visando determinar os níveis de energia associados ao sistema $c\bar{c}$. A partir desses níveis, foram calculadas as massas dos estados ligados, posteriormente classificados por meio da notação espectroscópica J^{PC} . Os resultados obtidos foram então comparados com dados experimentais disponíveis na literatura especializada.

A organização desta monografia ocorre da seguinte maneira: no Capítulo 2, escreve-se o procedimento empregado na obtenção das funções de onda e níveis de energia do poço de potencial infinito unidimensional. Ainda nesse, apresenta-se o estudo do oscilador harmônico quântico unidimensional, incluindo seus níveis de energia e respectivas funções de onda construídas a partir dos polinômios de Hermite. Ademais, a solução analítica do átomo de hidrogênio é abordada, tanto a parte angular quanto a radial, conectando com o estudo do charmônio. O Capítulo 3 é dedicado à metodologia numérica empregada na resolução da equação de Schrodinger para o átomo de hidrôgenio e para o estado c $\bar{c}$. No Capítulo 4 observa-se à apresentação dos resultados obtidos para o espectro de massas do charmônio. No Capítulo 5, são discutidas as considerações finais do trabalho, bem como possíveis extensões e perspectivas futuras para o estudo desenvolvido.

Soluções da Equação de Schrodinger para Sistemas Quânticos

2

Na Mecânica Quântica, a função de onda contém todas as informações físicas acessíveis sobre o sistema estudado. A equação de Schrodinger escrita em sua forma diferencial,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V \Psi, \quad (2.1)$$

ocupa uma posição central na mecânica quântica, pois descreve a evolução temporal da função de onda $\psi(x, t)$. A partir de suas soluções, é possível obter informações sobre os estados quânticos do sistema e calcular as probabilidades associadas aos resultados de diferentes observáveis físicos [4].

Podemos justificar a forma da Eq. (2.1) examinando a solução esperada para a partícula livre, que deve dar uma onda cuja forma em qualquer instante específico, dado pela função de onda $\psi(x)$, é a de uma onda de De Broglie simples, como $\psi(x) = A \sin(kx)$, onde A é a amplitude da onda e $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda. Se estivermos procurando por uma equação diferencial, então precisamos tomar algumas derivadas [6]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = k A \cos(kx), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx) = -k^2 \Psi(x). \quad (2.2)$$

Através de separação de variáveis, podemos obter a equação de Schrodinger independente do tempo, ou seja, para estados estacionários [4, 6]:

$$i\hbar \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V. \quad (2.3)$$

Como o membro esquerdo depende exclusivamente do tempo t e o membro direito depende apenas da coordenada espacial x , a igualdade só pode ser satisfeita para todos os valores de x e t se ambos os membros forem iguais a uma mesma constante. Essa constante será identificada com a energia total do sistema e representada por E , correspondendo aos autovalores do operador Hamiltoniano [4].

A equação diferencial temporal possui solução imediata, resultando em uma dependência exponencial complexa da forma [4]:

$$\phi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.4)$$

Dessa forma, a evolução temporal de um estado estacionário é completamente determinada por um fator de fase dependente da energia do sistema [4].

Observa-se que a dependência temporal não altera a densidade de probabilidade do sistema, uma vez que o fator exponencial possui módulo unitário. Por essa razão, estados descritos por essa solução são denominados estados estacionários [4].

A equação diferencial associada à coordenada espacial assume a forma:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V = E \quad \text{ou} \quad \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi = E \psi, \quad (2.5)$$

sendo conhecida como Equação de Schrodinger independente do tempo. Diferentemente da parte temporal, cuja solução possui forma universal, a solução dessa equação depende explicitamente do potencial $V(x)$ considerado [4].

A função $\psi(x)$ obtida a partir dessa equação contém toda a informação espacial do sistema quântico, permitindo determinar a distribuição de probabilidade da partícula por meio da quantidade $|\psi(x)|^2$. Além disso, os valores admissíveis da constante E são determinados pelas condições físicas impostas ao problema, resultando em níveis de energia discretos para sistemas ligados [4, 6].

Dessa forma, a determinação dos estados quânticos de um sistema reduz-se à resolução da equação de Schrodinger independente do tempo para um dado potencial. Toda a informação sobre as interações que atuam sobre a partícula encontra-se contida em $V(x)$, de modo que diferentes potenciais conduzem a diferentes espectros de energia e funções de onda. Nos tópicos seguintes serão analisados alguns exemplos fundamentais da Mecânica Quântica, ilustrando como a escolha do potencial influencia diretamente as propriedades físicas do sistema [4, 6].

2.1 Poço de Potencial Infinito

Uma partícula encontra-se confinada na região entre $x=0$ e $x=L$ por barreiras de energia potencial infinitamente altas. Imagine um aparato como o da Fig. 2.1, no qual a partícula se move livremente nessa região e sofre colisões elásticas com as barreiras perfeitamente rígidas que a confinam. Esse é o famoso problema da “partícula na caixa”. Assumiremos que a partícula se move em apenas uma dimensão [6].

O potencial nesse caso especial é expresso como:

$$V(x)=0, \text{ se } 0 \leq x \leq L, \text{ e } \infty, \text{ caso contrário.} \quad (2.6)$$

Fora do poço, $\Psi(x)=0$, ou seja, a probabilidade de encontrar a partícula é zero. Dentro do poço, em que $V=0$, pela Eq. (2.3), a Eq. (2.5) diz que [4, 6]:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = E \psi \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k \psi, \quad \text{onde} \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (2.7)$$

Essa é uma equação diferencial linear de segunda ordem, que descreve matematicamente um oscilador harmônico simples (Descrito no sub capítulo 2.2) [4] em que a solução geral é a soma das Eq. (2.2), em que A e B são constantes de normalização, aplicando a exigência de que $\psi(x)$ seja contínuo em qualquer fronteira [4, 6]:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.8)$$

Neste caso, deve-se exigir que as soluções para $x < 0$ e $x > 0$ coincidam em $x = 0$; similarmente, as soluções para $L > 0$ devem coincidir em $x = L$ [4, 6]. Então:

$$\psi(L) = A \sin(kL) + B \cos(kL). \quad (2.9)$$

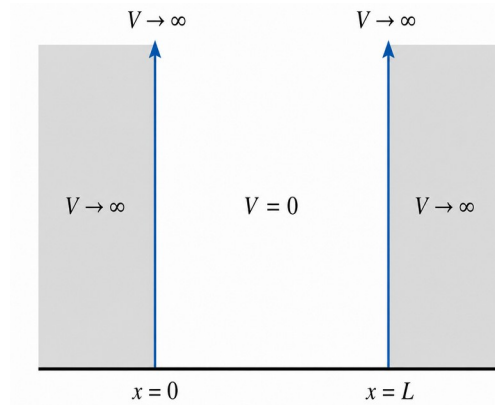


Figura 2.1: A energia potencial de uma partícula que se move livremente ($V=0$) na região $0 \leq x \leq L$, mas é completamente excluído ($V=\infty$) das regiões $x < 0$ e $x > L$. Fonte: [6]

Aplicando a condição de contorno $\psi(0)=0$, obtém-se $B=0$, de modo que a solução passa a ser dada por [6]:

$$\psi(x) = A \sin(kx). \quad (2.10)$$

Impõe-se então a segunda condição de contorno, $\psi(L)=0$, resultando em [6]:

$$A \sin(kL) = 0. \quad (2.11)$$

A escolha $A=0$ conduz à solução trivial $\psi(x)=0$, que não possui significado físico. Portanto, deve-se exigir que $\sin(kL)=0$, o que implica [6]:

$$kL = n\pi, \text{ onde } n=1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

Com $k=2\pi/\lambda$, temos $\lambda=2L/n$; Assim, a solução da equação de Schrodinger para uma partícula presa em uma região linear de comprimento L é uma série de ondas estacionárias de De Broglie [4].

Resolvendo a Eq. (2.12) para k e substituindo na Eq. (2.7), obtém-se [6]:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \quad (2.13)$$

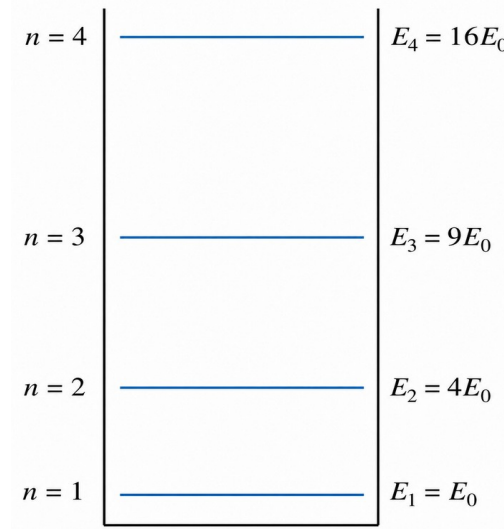


Figura 2.2: Os quatro primeiros níveis de energia do poço quadrado infinito unidimensional. Fonte: [6]

O estado de energia mais baixo, para o qual $n=1$ (Veja-o na Fig. 2.2), é conhecido como estado fundamental, e os com energias mais altas ($n>1$) são conhecidos como estados excitados [4, 6]. Como a energia é puramente cinética neste caso, o resultado significa que apenas certos valores de momento. A partir de um estado de energia, a partícula pode fazer saltos ou transições para outro estado de energia absorvendo ou liberando uma quantidade de energia igual à diferença de energia entre os dois estados [3, 4, 6].

A equação de Schrodinger independente do tempo produziu um conjunto infinito de soluções (uma para cada número inteiro positivo n) [4, 6]. As primeiras soluções estão representadas na Fig. 2.3 em uma comparação direta da função de onda e as respectivas densidades de probabilidade cujas energias aumentam proporcionalmente a n^2 . Como conjunto, as funções $\psi_n(x)$ têm algumas propriedades interessantes e importantes [4]:

1. São alternadamente par e ímpar em relação ao centro do poço: ψ_1 é par, ψ_2 é ímpar, ψ_3 é par, e assim por diante [4];
2. Conforme há ganho de energia, cada estado sucessivo ganha mais um nó (cruzamento zero): ψ_1 não tem nenhum (os extremos não contam), ψ_2 tem um, ψ_3 tem dois, e assim por diante [4].

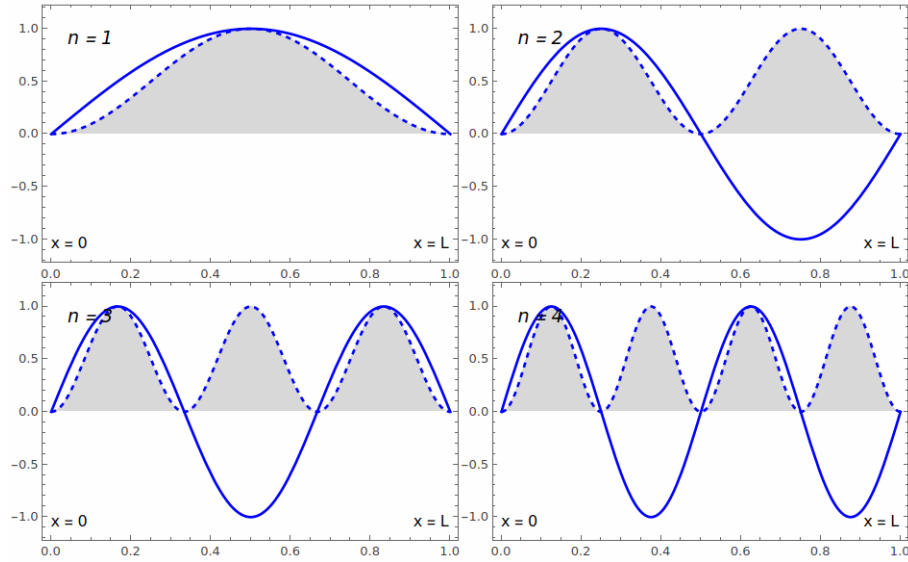


Figura 2.3: As funções de onda, $\psi_n(x)$ (linha contínua), e as respectivas densidades de probabilidade, $|\psi_n(x)|^2$ (linha tracejada), para o poço de potencial infinito unidimensional, para os estados com $n = 1, 2, 3$ e 4 . Produção dos gráficos: Plataforma Wolfram.

2.2 Oscilador Harmônico Quântico

Após o estudo do poço de potencial infinito, que constitui um dos exemplos mais elementares de quantização em Mecânica Quântica, torna-se natural avançar para sistemas descritos por potenciais mais realistas e fisicamente relevantes. Nesse contexto, o oscilador harmônico quântico representa um passo importante no desenvolvimento teórico de sistemas quânticos ligados, introduzindo um potencial contínuo capaz de descrever pequenas oscilações em torno de posições de equilíbrio [4, 6].

Além de possuir solução analítica exata, o oscilador harmônico desempenha papel central em diversas áreas da Física, aparecendo como aproximação para inúmeros sistemas físicos. Seu estudo permite compreender aspectos fundamentais da quantização da energia, da estrutura das funções de onda e do comportamento de partículas submetidas a potenciais confinantes suaves, servindo como uma etapa intermediária entre modelos idealizados simples e sistemas mais complexos, como o átomo de hidrogênio e os estados ligados de quarks pesados [4, 6].

O oscilador clássico é um objeto de massa m preso a uma mola de constante elástica k . A mola exerce uma força restauradora $F = -kx$ sobre o objeto, onde x é o deslocamento a partir de sua posição de equilíbrio. Usando as leis de Newton, podemos analisar o oscilador e mostrar que ele tem uma frequência (circular ou

angular) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e um período $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. A distância máxima do objeto oscilante de sua posição de equilíbrio é $+x_0$. O oscilador tem sua energia cinética máxima em $x=0$ e ela desaparece nos pontos de inflexão $x = \pm x_0$. Nos pontos de inflexão, o oscilador para por um instante e então inverte sua direção de movimento, que é confinado à região $-x_0 \leq x \leq +x_0$. Veja essa estrutura na Fig. 2.4 [4, 6, 7].

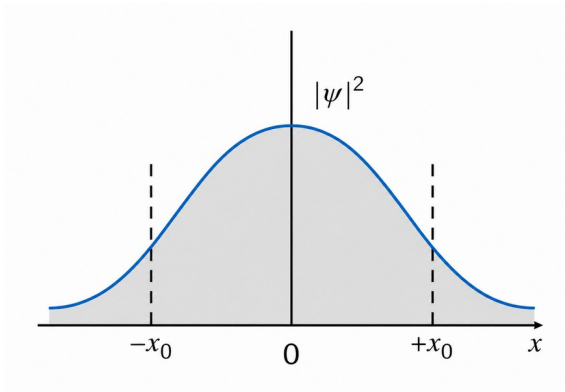


Figura 2.4: Densidade de probabilidade para o estado fundamental do oscilador harmônico simples. Fonte: [6]

Embora nunca se tenha encontrado um exemplo de oscilador quântico unidimensional na natureza, qualquer sistema em um poço de energia potencial que varia suavemente próximo ao seu mínimo se comporta aproximadamente como um. Uma molécula formada por um sistema ligado de 2 átomos vibrante, por exemplo. Por isso é interessante analisar o movimento de tal sistema usando mecânica quântica [6].

Uma força $F = -kx$ tem a energia potencial associada [4, 7]

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.14)$$

e assim pode-se reescrever a equação de Schrodinger [4, 7]:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi, \quad (2.15)$$

onde V e ψ são funções apenas de x , pois essa abordagem está sendo feita em uma dimensão. Afinal, não há limites entre diferentes regiões de energia potencial aqui, então a função de onda deve cair para zero tanto para $x \rightarrow +\infty$ quanto para $x \rightarrow -\infty$ [6].

Com o intuito de facilitar as contas no método de séries utilizado para resolver a Eq. (2.15), vale a introdução de uma variável adimensional [4]:

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x; \quad (2.16)$$

Em termos de ξ a Eq. (2.14) fica [4]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = (\xi^2 - K) \psi \quad \text{em que} \quad K \equiv \frac{2E}{\hbar \omega}. \quad (2.17)$$

Após resolver a Eq. (2.14), é possível mostrar que a função de onda normalizada para o oscilador assume a forma [4, 6, 7]:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad \text{onde } n=0,1,2,3,\dots, \quad (2.18)$$

em que $H_n(\xi)$ são os Polinômios de Hermite [4, 6, 7].

E as energias correspondentes para cada estado n são [4, 6, 7]:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad \text{para } n=0,1,2,3,\dots \quad (2.19)$$

Os níveis de energia são mostrados na Fig. 2.5. Eles são uniformemente espaçados, em contraste com o poço de potencial infinito unidimensional visto no tópico anterior [4, 6].

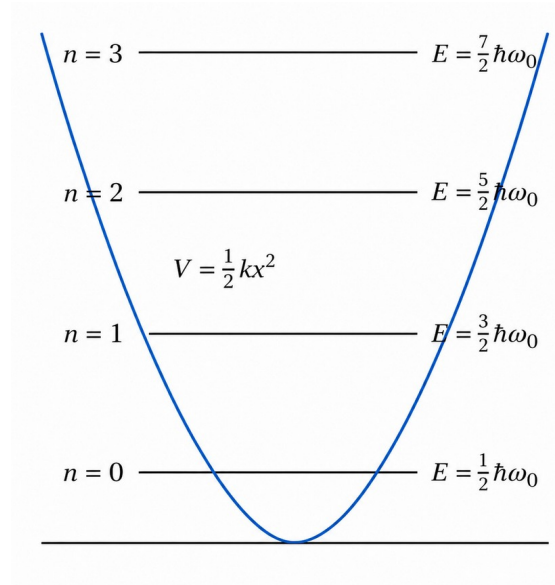


Figura 2.5: Níveis de energia de um oscilador harmônico simples. Fonte: [6]

O módulo da função de onda está representado na Fig. 2.6. Todas as soluções têm a propriedade de ultrapassar a região proibida além dos pontos de retorno clássicos, diminuindo a probabilidade de encontrar a partícula exponencialmente [6]. A densidade de probabilidade oscila, de certa forma, como uma onda senoidal entre os pontos de retorno e diminui como e^{-ax^2} até zero além dos pontos de retorno [4, 6]. Observe a grande semelhança entre as densidades de probabilidade para o oscilador quântico e as do poço de potencial finito (Fig. 2.3).

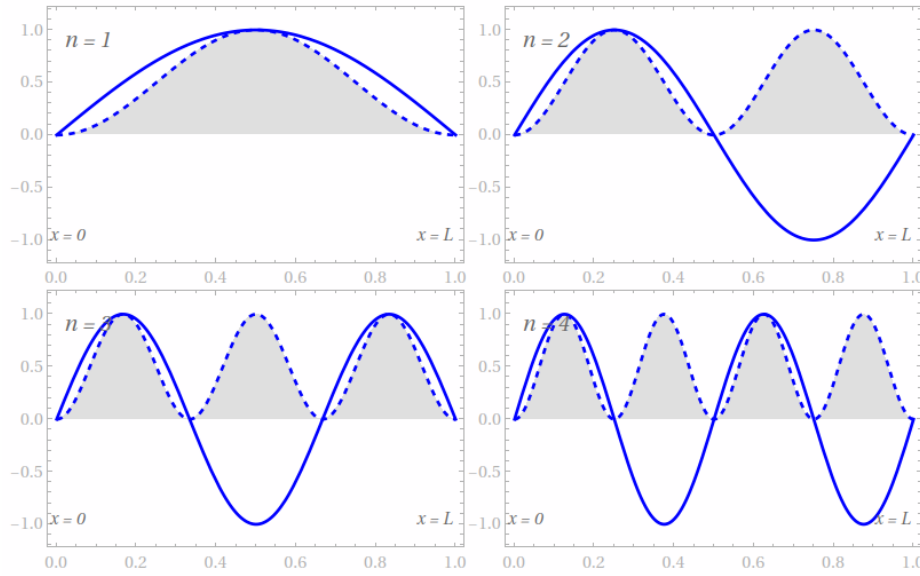


Figura 2.6: Funções de onda $\psi(x)$ (linha contínua) e suas densidades de probabilidade $|\psi(x)|^2$ (linha pontilhada) para os quatro primeiros estados estacionários ($n=1, 2, 3, 4$) do oscilador harmônico simples. Observa-se o aumento do número de nós da função de onda com o número quântico n . Produção dos gráficos: Plataforma Wolfram.

Uma sequência de estados vibracionais excitados semelhante à Fig. 2.5 é comumente encontrada em moléculas diatômicas. O espaçamento entre os estados é tipicamente de 0,1 a 1 eV; os estados são observados quando fótons (na região infravermelha do espectro) são emitidos ou absorvidos à medida que a molécula salta de um estado para outro. Uma sequência semelhante é observada em núcleos, onde o espaçamento é de 0,1 a 1 MeV e as radiações estão na região de raios gama do espectro [6].

2.3 Solução Analítica do átomo de Hidrogênio

O átomo de hidrogênio, composto por um próton e um elétron, ocupa posição central no desenvolvimento da Mecânica Quântica, constituindo o primeiro sistema físico real cuja equação de Schrodinger admite solução analítica completa. A obtenção dessa solução é possível porque se trata de um sistema de dois corpos interagindo por uma força central. Assim, é possível reduzi-lo a um problema de uma única

partícula descrita por uma massa reduzida ($\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$). Como a massa do próton é

aproximadamente 1836 vezes maior que a do elétron, a massa reduzida do sistema é praticamente igual à massa do elétron. Dessa forma, o problema pode ser tratado, com excelente aproximação, como o movimento de um elétron sob a influência de uma força central descrita pelo potencial de Coulomb gerado pelo próton [6]. Seu estudo fornece uma descrição exata de estados ligados submetidos a um potencial

central Coulombiano, permitindo a introdução de conceitos fundamentais como números quânticos, momento angular orbital e degenerescência dos níveis de energia [4, 6].

Além de sua relevância histórica, a solução do átomo de hidrogênio estabelece a base matemática utilizada na descrição de sistemas ligados mais complexos. Muitos dos métodos desenvolvidos para esse sistema, como a separação de variáveis em coordenadas esféricas e a análise da equação radial, permanecem cruciais em aplicações modernas da Mecânica Quântica. Nesse contexto, um exemplo dessa aplicação é o estudo espectroscópico de estados ligados de quarks pesados, como o charmônio, que será explorado em seções futuras neste trabalho [6].

2.3.1 A Equação de Schrodinger em coordenadas esféricas

A descrição quântica do átomo de hidrogênio é realizada por meio da equação de Schrodinger aplicada a um sistema composto por um elétron submetido ao potencial eletrostático gerado pelo próton. Devido à simetria esférica desse potencial, torna-se conveniente expressar a equação de Schrodinger em coordenadas esféricas, permitindo explorar as propriedades geométricas do sistema de forma mais adequada [4].

O potencial associado à interação entre o elétron e o próton é dado pelo potencial Coulombiano:

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.20)$$

o qual depende exclusivamente da coordenada radial (r) [4, 6, 7]. Essa dependência apenas da distância entre as partículas caracteriza o sistema como um problema de potencial central, tornando possível a separação das variáveis radial e angular da função de onda [4, 6].

Nesse contexto, como o potencial coulombiano depende apenas da distância entre o elétron e o núcleo, isto é, da coordenada radial (r), torna-se conveniente substituir as coordenadas cartesianas (x, y, z) por coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), relacionadas por [4]:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi); \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi); \quad z = r \cos(\theta). \quad (2.21)$$

Essa escolha explora a simetria esférica do problema e simplifica significativamente a resolução da equação. Reescrevendo o operador laplaciano em coordenadas esféricas, a equação de Schrodinger independente do tempo assume a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V \psi = E \psi. \quad (2.22)$$

A simetria esférica do potencial permite buscar soluções para o sistema utilizando o método de separação de variáveis. Assim, a função de onda pode ser escrita como:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi), \quad (2.23)$$

onde $R(r)$ descreve a dependência radial da função de onda e $Y(\theta, \phi)$ é a parte angular (harmônicos esféricos) [4]. A partir dessa decomposição, a equação de Schrodinger pode ser separada em duas equações diferenciais independentes. Impondo condições de contorno físicas às soluções dessas equações, surge a quantização das constantes de separação. Dessa forma, revelam-se os números quânticos e os níveis de energia do átomo de hidrogênio [4, 6].

Inserindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.22), obtém-se [4]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY. \quad (2.24)$$

Realizando as devidas manipulações na equação, chega-se em 2 termos, um apenas com as variáveis angulares (θ e ϕ) e outro dependendo apenas de r . Essas variáveis variam de forma independente, então a única forma de satisfazer a igualdade em todo o espaço é se os termos forem uma mesma constante de separação. Por conveniência, a constante é definida por $l(l+1)$, resultando em [4, 6]:

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] = l(l+1) \text{ ou} \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right\} = -l(l+1). \quad (2.26)$$

2.3.2 Solução Angular e os Harmônicos Esféricos

A separação da função de onda em coordenadas esféricas conduz naturalmente a uma equação angular associada às variáveis θ e ϕ [4, 6]. Essa etapa é fundamental na solução do átomo de hidrogênio, pois permite descrever as propriedades relacionadas ao momento angular orbital do elétron e às simetrias espaciais do sistema.

Assumindo a decomposição da função de onda na forma da Eq. (2.23) o método de separação de variáveis pode ser aplicado na parte angular, permitindo escrevê-la como produto de duas funções independentes [4, 6, 7]:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (2.27)$$

A substituição dessa forma na Eq. (2.26) resulta em duas equações diferenciais independentes: uma dependente da coordenada azimutal (ϕ) e outra associada ao ângulo polar (θ). A solução da equação em ϕ deve satisfazer a condição de periodicidade da função de onda, isto é, o valor da função deve permanecer inalterado após uma rotação completa de 2π . Essa exigência leva naturalmente ao aparecimento do número quântico magnético (m), que assume apenas valores

inteiros. Já a equação em θ possui como soluções os polinômios associados de Legendre, cuja existência impõe restrições adicionais que introduzem o número quântico orbital (l) [4, 6].

As funções de onda angulares normalizadas são conhecidas como *harmônicos esféricos*:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta), \quad (2.28)$$

onde ϵ representa o fator de fase (fase de Condon–Shortley), introduzido para garantir as propriedades de simetria e ortogonalidade dos harmônicos esféricos [4]. Essas funções descrevem a amplitude de probabilidade angular do elétron em torno do núcleo e apresentam importantes propriedades de ortogonalidade e simetria.

Os números quânticos l e m estão diretamente relacionados à quantização do momento angular orbital. O número quântico l é inteiro e não negativo e determina o módulo do momento angular orbital do sistema, enquanto m descreve sua projeção ao longo de um eixo escolhido, convencionalmente o eixo z . Vale ressaltar que m é restrito ao intervalo $-l \leq m \leq +l$ [6].

Além de sua importância matemática, os harmônicos esféricos possuem interpretação física significativa, estando associados às diferentes formas geométricas dos orbitais atômicos. As simetrias apresentadas por essas soluções desempenham papel fundamental em espectroscopia quântica e reaparecem em diversos sistemas ligados descritos por potenciais centrais, incluindo sistemas de quarks pesados estudados em Física de Partículas [6].

A partir das autofunções calculadas analiticamente, foram construídas representações gráficas dos harmônicos esféricos associados às soluções angulares. Essas visualizações permitem analisar de maneira mais intuitiva as propriedades geométricas e probabilísticas dos diferentes estados quânticos.

A Fig. 2.7 apresenta um exemplo da estrutura angular associada aos harmônicos esféricos obtidos analiticamente. Observa-se que diferentes combinações dos números quânticos produzem padrões de simetria distintos, refletindo diretamente as propriedades do momento angular orbital do sistema.

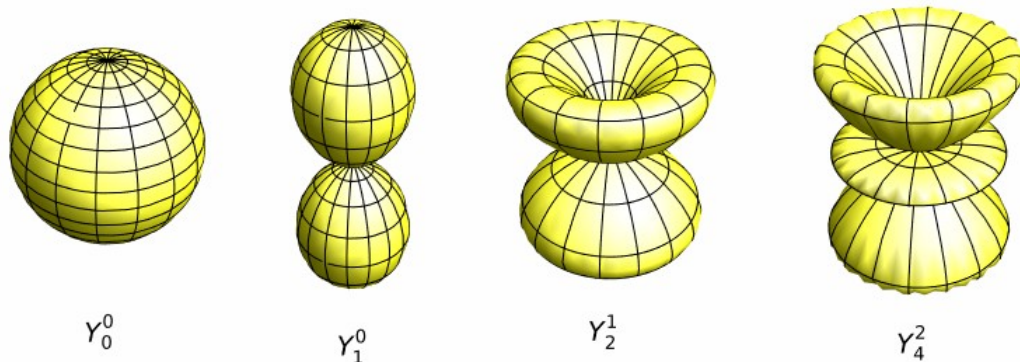


Figura 2.7: Representação tridimensional de alguns harmônicos esféricos, evidenciando sua estrutura angular e propriedades de simetria. Produção: Plataforma Wolfram.

Além disso, as densidades de probabilidade obtidas evidenciam regiões espaciais preferenciais para a localização do elétron, reproduzindo comportamentos característicos previstos pela solução analítica do átomo de hidrogênio.

2.3.3 Solução Radial

Após a separação das variáveis angulares, a equação de Schrodinger reduz-se a uma equação diferencial radial responsável por descrever a dependência da função de onda em relação à distância entre o elétron e o núcleo. A solução dessa equação fornece informações fundamentais sobre os níveis de energia permitidos e sobre a distribuição espacial de probabilidade da partícula [6].

A equação radial do átomo de hidrogênio pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R = l(l+1) R, \quad (2.29)$$

onde $R(r)$ representa a parte radial da função de onda e (l) corresponde ao número quântico orbital associado ao momento angular [4, 6].

A presença do termo proporcional a $l(l+1)$ permite interpretar a equação radial em termos de um potencial efetivo, dado pela soma entre o potencial Coulombiano e um termo centrífugo associado ao momento angular orbital da partícula [6]. Dessa forma, a dinâmica radial do sistema passa a ser governada por um potencial efetivo da forma [4, 6]:

$$V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.30)$$

A análise assintótica da equação radial mostra que as soluções fisicamente aceitáveis devem permanecer finitas tanto na origem quanto no limite [4, 6]. Essas condições conduzem naturalmente a soluções expressas em termos dos polinômios

associados de Laguerre, introduzindo o número quântico principal (n), responsável pela quantização dos níveis de energia do átomo de hidrogênio [4].

Como consequência, obtém-se o conhecido espectro de energia:

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.31)$$

o qual evidencia que os estados ligados do átomo de hidrogênio possuem energias discretas e negativas [4, 6, 7]. O sinal negativo indica que o elétron encontra-se ligado ao núcleo, sendo necessária uma quantidade mínima de energia para ionizar o sistema [6].

Os níveis de energia do átomo de hidrogênio dependem apenas do número quântico principal (n), resultando em uma degenerescência associada aos diferentes valores possíveis dos números quânticos l e m [4, 6]. Essa estrutura degenerada reflete a

elevada simetria do potencial Coulombiano e constitui uma das características mais importantes da solução analítica do átomo de hidrogênio [6].

Solução Numérica pelo Método dos Elementos Finitos

3

Embora o átomo de hidrogênio admita solução analítica exata, a resolução numérica da equação de Schrodinger constitui uma etapa importante na validação de métodos computacionais aplicados a sistemas quânticos ligados. Além de reproduzir os níveis de energia conhecidos experimentalmente, o tratamento numérico permite visualizar funções de onda e densidades de probabilidade associadas aos diferentes estados quânticos.

Nesse contexto, o estudo numérico do átomo de hidrogênio desempenha papel intermediário entre os modelos analíticos fundamentais da Mecânica Quântica e sistemas mais complexos, como o harmônio, cuja solução analítica não pode ser obtida de forma exata.

A resolução numérica da equação de Schrodinger para o átomo de hidrogênio foi realizada utilizando o software Wolfram, por meio da função *NDEigensystem*, empregada na obtenção numérica de autofunções e autovalores associados a equações diferenciais. O método utilizado baseia-se na discretização da equação diferencial em uma malha finita, permitindo transformar o problema contínuo em um sistema algébrico solucionável computacionalmente.

3.1 Solução Numérica do Átomo de Hidrogênio

Neste trabalho, foi considerada a equação radial de Schrodinger associada ao potencial Coulombiano, como descrito pelo potencial efetivo na Eq. (2.30), incluindo também o termo centrífugo dependente do número quântico orbital (l). O domínio radial foi definido em um intervalo suficientemente grande para garantir o decaimento adequado das funções de onda e minimizar efeitos numéricos associados às condições de contorno.

As soluções foram obtidas para diferentes valores dos números quânticos n , l e m , permitindo investigar tanto os níveis de energia quanto as propriedades espaciais das funções de onda associadas aos estados ligados do átomo de hidrogênio. As unidades adotadas foram escolhidas de forma a simplificar a implementação computacional e facilitar a comparação com os resultados analíticos conhecidos.

Com o objetivo de validar a metodologia numérica empregada neste trabalho, a equação radial de Schrodinger para o átomo de hidrogênio foi resolvida utilizando o método dos elementos finitos. A partir da implementação numérica, foram obtidas as

funções de onda radiais correspondentes aos diferentes estados quânticos do átomo de hidrogênio, bem como seus respectivos autovalores de energia. Inicialmente, os resultados foram fornecidos em unidades atômicas de energia (*Hartree*²), convenientes para cálculos computacionais em Mecânica Quântica. Posteriormente, esses valores foram convertidos para elétron-volts (eV), permitindo uma comparação direta com os valores tradicionalmente apresentados na literatura.

Para a resolução numérica da equação radial, foi utilizada a função radial reduzida $u(r)$, definida como:

$$u(r) = rR(r), \quad (3.1)$$

onde $R(r)$ representa a função radial usual do átomo de hidrogênio. Essa transformação permite reescrever a equação de Schrodinger radial em uma forma unidimensional mais adequada para a aplicação do método dos elementos finitos, eliminando o termo de primeira derivada presente na equação original.

A Fig. 3.1 apresenta as funções radiais reduzidas obtidas numericamente para os quatro primeiros níveis de energia do átomo de hidrogênio. Observa-se que o número de nós aumenta com o número quântico principal (n), enquanto a extensão espacial das soluções cresce para estados de maior energia. Essas características estão em concordância com os resultados previstos pela solução analítica do problema e refletem diretamente a estrutura quantizada dos estados ligados do sistema.

Os níveis de energia calculados reproduzem a conhecida estrutura discreta do espectro do hidrogênio, evidenciando a quantização das energias permitidas para o elétron ligado ao núcleo. A concordância entre os resultados numéricos e os valores teóricos esperados demonstra a confiabilidade do método empregado, fornecendo uma importante etapa de validação antes de sua aplicação ao estudo de sistemas mais complexos, como o charmônio.

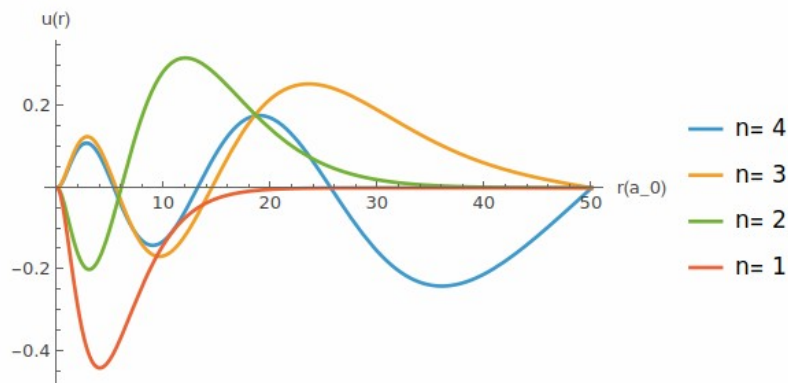


Figura 3.1: Funções radiais reduzidas $u(r)$ dos estados ligados do átomo de hidrogênio para os níveis principais $n=1, 2, 3$ e 4 , em função da distância radial r (em unidades do raio de Bohr a_0). Produção:

Plataforma Wolfram

² Hartree (Ha) é uma unidade de energia amplamente utilizada em Física Atômica e Química. Ela corresponde à energia potencial eletrostática entre um elétron e um próton separados por um raio de Bohr. Numericamente, $1 \text{ Ha} \sim 27,2114 \text{ eV}$.

Observa-se que os estados de menor energia apresentam maior concentração de probabilidade nas proximidades do núcleo, enquanto estados excitados exibem distribuição espacial mais extensa. Além disso, o surgimento de nodos radiais para valores crescentes de (n) reflete diretamente a estrutura matemática das soluções da equação radial de Schrodinger e constitui uma das principais características dos estados ligados do átomo de hidrogênio.

4

Charmônio: um estado ligado $c\bar{c}$

Após a validação da metodologia numérica por meio da resolução do átomo de hidrogênio, um sistema cuja solução analítica é amplamente conhecida, o mesmo procedimento pode ser estendido para o estudo de sistemas mais complexos. Entre eles, destacam-se os estados ligados formados por quarks pesados, cuja descrição exige a consideração das propriedades da interação forte [2, 3, 5].

Neste contexto, o sistema charmônio, composto por um quark charme e um antiquark charme ($c\bar{c}$), constitui um dos exemplos mais importantes da física hadrônica moderna. Devido à elevada massa do quark charme ($1.2730 \pm 0.004 \text{ GeV}$, de acordo com dados do PDG [9]), os efeitos relativísticos tornam-se menos pronunciados do que em sistemas formados por quarks leves, permitindo que uma abordagem não relativística baseada na equação de Schrodinger forneça uma descrição bastante satisfatória de seu espectro de estados ligados [8, 10].

Dessa forma, o estudo do charmônio representa uma oportunidade de aplicar os métodos desenvolvidos ao longo deste trabalho em um sistema de relevância experimental e teórica, estabelecendo uma conexão direta entre a Mecânica Quântica não relativística e a Cromodinâmica Quântica.

A confirmação experimental da existência do quark charme ocorreu em 1974, durante um período conhecido como Revolução de Novembro. Nesse ano, grupos independentes liderados por Burton Richter, no SLAC, e Samuel Ting, no Brookhaven National Laboratory, observaram uma nova ressonância hadrônica com massa próxima de 3.1 GeV . A partícula recebeu o nome de $\psi(3105)$ pelos dois grupos de pesquisa e, posteriormente, passou a ser conhecida como J/ψ . Atualmente, esse estado é interpretado como o estado fundamental vetorial do sistema charmônio. [11, 12, 13]

A interação forte apresenta um comportamento característico decorrente da dinâmica das cargas de cor descrita pela Cromodinâmica Quântica. Em pequenas distâncias, a interação entre quarks é associada a interação eletromagnética (troca de fótons) por conta das cargas opostas do charmônio (assim como o elétron e o próton no átomo de hidrogênio). Na parte superior da Fig. 4.1 encontra-se a representação da força³ em função da energia do sistema. Nessa região, os quarks encontram-se fortemente ligados, mas a intensidade efetiva da interação torna-se suficientemente reduzida para que possam ser tratados como quase livres [3, 5, 8, 11].

Por outro lado, quando a distância entre os quarks aumenta, a interação forte passa a manifestar o fenômeno do confinamento de cor, no qual a energia potencial cresce aproximadamente de forma linear com a separação [5, 8].

³ A força é a derivada do potencial, assim, em pequenas distâncias a intensidade diminui continuamente. Se o potencial cresce linearmente com r , como é o caso do confinamento, a força é constante.

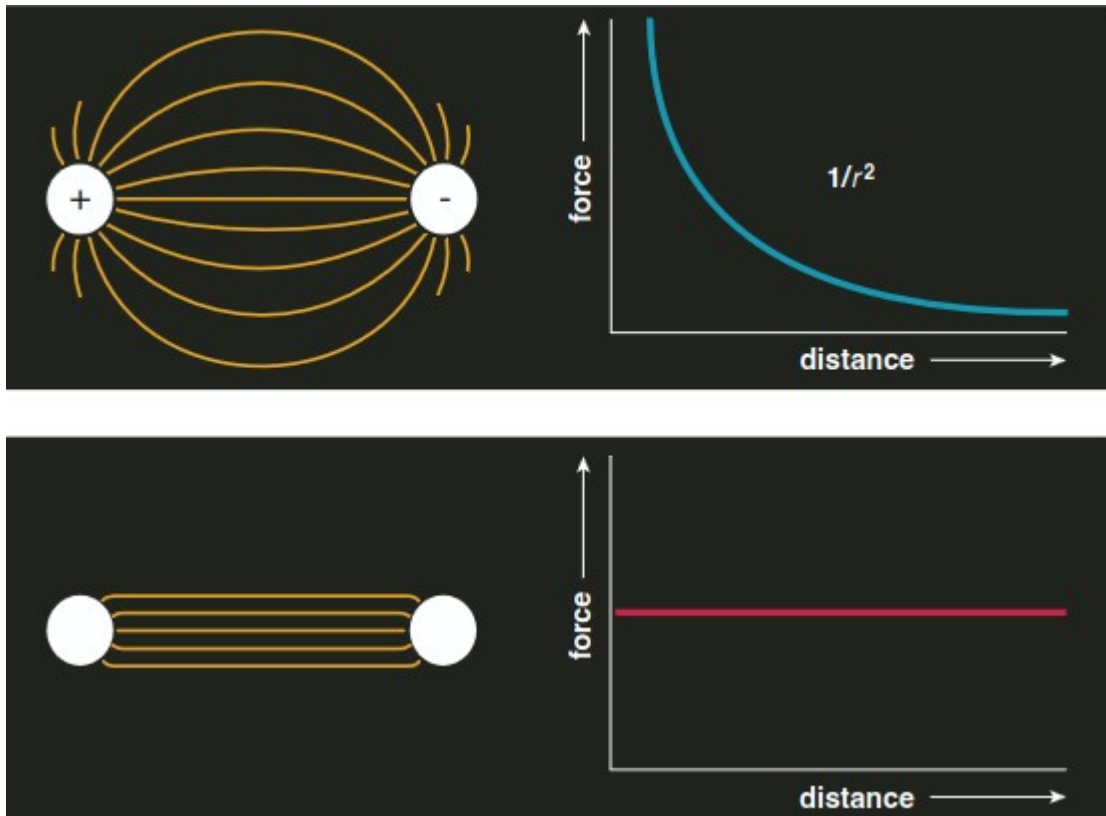


Figura 4.1: As linhas do campo elétrico que conectam duas partículas com cargas opostas tendem a se espalhar para fora, dando origem a uma propriedade característica tanto da força eletrostática (Coulomb) quanto da gravidade: a magnitude da força diminui com o quadrado da distância de uma carga ou massa (acima). As linhas do campo cromomagnético quântico que conectam dois quarks, no entanto, permanecem em um feixe compacto, o que fornece uma força constante (abaixo). Fonte: [14]

4.1 Potencial de Cornell

Entre os diversos modelos propostos na literatura, o potencial de Cornell (Equação 3.2) destaca-se por sua simplicidade e notável capacidade de reproduzir o espectro de massas de sistemas formados por quarks pesados. Desenvolvido originalmente para o estudo do charmônio, esse potencial incorpora de maneira efetiva tanto o regime de pequenas distâncias quanto o confinamento [3, 4, 5, 11, 14].

Matematicamente, o potencial de Cornell é escrito como:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{a}{r} + br, \quad (4.1)$$

onde r representa a distância entre o quark e o antiquark, a é uma constante associada à intensidade da interação de curto alcance e b corresponde à chamada tensão da corda, responsável pelo confinamento [4, 5, 11].

O primeiro termo possui a mesma dependência radial do potencial de Coulomb e descreve a interação dominante quando os constituintes encontram-se muito próximos [8, 14].

Por outro lado, o segundo termo cresce linearmente com a distância e representa o fenômeno de confinamento previsto pela Cromodinâmica Quântica. À medida que o quark e o antiquark são afastados, a energia potencial armazenada entre eles aumenta continuamente, tornando energeticamente desfavorável sua separação completa. Como consequência, os quarks permanecem permanentemente confinados em estados ligados, como representado na Fig. 4.2 [8, 14].

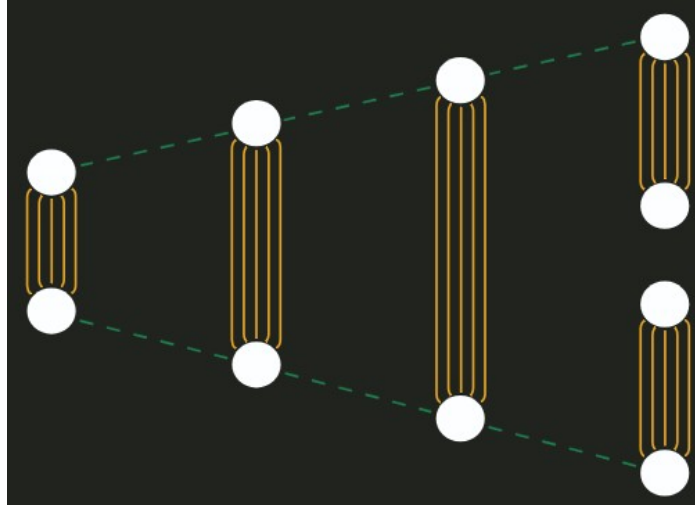


Figura 4.2: As tentativas de isolar os dois quarks que compõem um méson típico invariavelmente falham, porque a energia injetada no sistema é transformada em um novo quark e antiquark, que se ligam às extremidades cortadas das linhas de fluxo estendidas. Fonte: [14]

Embora o potencial de Cornell seja capaz de reproduzir satisfatoriamente a estrutura global do espectro de quarkônios pesados, sua forma básica não contempla determinados efeitos associados ao spin dos constituintes. Em particular, estados que possuem os mesmos números quânticos orbitais podem apresentar pequenas diferenças de massa decorrentes da interação entre os spins do quark e do antiquark [10].

Para incorporar esse efeito, frequentemente denominado interação hiperfina, adiciona-se ao potencial efetivo um termo dependente dos spins dos constituintes, representado por $V_{ss}(r)$:

$$V_{ss} = \frac{16\pi a}{9m_c^2} \delta_\sigma(r) \left[S(S+1) - \frac{3}{2} \right], \quad (4.2)$$

onde S é o spin do charmônio, m_c é a massa do charme e $\delta_\sigma(r) = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-\sigma^2 r^2}$ [10].

Esse termo é responsável pelo desdobramento espectral observado entre estados singletos e tripletos do sistema $c\bar{c}$ [14].

Dessa forma, o potencial efetivamente utilizado neste trabalho não corresponde apenas ao potencial de Cornell, mas à soma deste com a contribuição hiperfina. O potencial total pode ser escrito como [10]:

$$V_T = V_{\text{Cornell}} + V_{ss}. \quad (4.3)$$

4.2 Solução Numérica do Charmônio

Neste trabalho, o potencial de Cornell somado a interação spin-spin, representado na Eq. (4.3), foi utilizado como potencial efetivo dentro da equação radial de Schrodinger. A partir de sua resolução numérica, foram determinados os níveis de energia do sistema $c\bar{c}$, possibilitando a construção do espectro de massas do charmônio e sua posterior comparação com os resultados experimentais disponíveis na literatura.

Recaptulando a Eq. (2.29) da seção 2.3.3, temos a equação radial unidimensional que, apesar de especificada para o átomo de hidrogênio, também pode ser usada para solução do charmônio, uma vez que a única variável é o potencial, que pode ser substituído:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V_T(r) - E] R = l(l+1)R, \quad (4.4)$$

onde $V_T(r)$ corresponde ao potencial total e l é o número quântico orbital, busca-se determinar os autovalores de energia (E) e suas respectivas autofunções ($u(r)$).

Para garantir soluções fisicamente aceitáveis, foram impostas condições de contorno adequadas. Como a função radial reduzida deve permanecer finita na origem e tender a zero para grandes distâncias, adotou-se $r_{\min}=0$ e $r_{\max}=20$ onde $r_{\max}$ corresponde ao limite superior do domínio numérico. Considerando a variável radial na forma adimensional, esse valor foi entendido na escala do problema, isto é, como um número suficientemente grande para que os valores já tenham decaído de forma desprezível.

Os parâmetros do potencial de Cornell utilizados neste trabalho foram retirados do artigo referenciado em [10] e postos na Tabela 4.1 de forma a reproduzir adequadamente o espectro conhecido do sistema charmônio. Além disso, foi adotado para o quark charme um valor efetivo de massa igual a 1.409 MeV , valor escolhido baseado tanto nos dados do PDG [9], quanto do artigo [10]. Esses parâmetros definem completamente o Hamiltoniano do sistema e permitem a obtenção dos níveis de energia associados aos diferentes estados quânticos.

Parâmetros	Valores	Unidades
a	0.350	—
b	0.15	GeV^2
σ	4.0	GeV

Tabela 4.1: Parâmetros usados neste trabalho. Fonte: [10]

A resolução foi realizada para diversos valores dos números quânticos radial (n) e orbital (l), permitindo investigar estados pertencentes às famílias $S(l=0)$, $P(l=1)$, $D(l=2)$ e $F(l=3)$. Para cada solução encontrada, o autovalor obtido corresponde à energia de ligação do sistema, enquanto a autofunção associada descreve a distribuição espacial relativa entre o quark e o antiquark.

Uma vez determinados os autovalores da equação radial, as massas dos estados ligados foram calculadas a partir da relação:

$$M = 2m_c + E, \quad (4.5)$$

onde m_c representa a massa do quark charme e E a energia obtida numericamente [10]. Essa expressão decorre da aproximação não relativística adotada para o sistema $c\bar{c}$: a massa total do méson é escrita, de forma aproximada, como a soma das massas do quark e do antiquark, acrescida da energia de ligação associada ao potencial efetivo. Como o charmônio é formado por um quark charme e um antiquark charme, ambos com a mesma massa, temos 2 vezes a massa ($2m_c$). Os resultados calculados foram então associados aos estados espectroscópicos correspondentes e comparados com os valores experimentais compilados pelo Particle Data Group (PDG [9]), permitindo avaliar a capacidade do potencial de Cornell em reproduzir a estrutura espectral observada para o sistema.

4.3 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da resolução numérica da equação de Schrodinger para o sistema charmônio utilizando o potencial efetivo descrito no capítulo anterior. A partir dos autovalores de energia calculados, foram determinadas as massas dos estados ligados $c\bar{c}$ para diferentes combinações dos números quânticos radiais e orbitais.

Com o objetivo de avaliar a precisão do modelo adotado, os resultados obtidos foram comparados tanto com valores teóricos encontrados na literatura quanto com os dados experimentais compilados pelo PDG [9]. Essa comparação permite verificar a capacidade do potencial utilizado em reproduzir a estrutura espectral observada para o sistema charmônio.

A Tabela 4.2 apresenta os estados calculados neste trabalho, juntamente com suas respectivas notações espectroscópicas (J^{PC})⁴, as massas obtidas numericamente, os valores reportados por [10] e, quando disponíveis, os valores experimentais do PDG [9].

De maneira geral, observa-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos neste trabalho e os valores experimentais disponíveis. Para os estados fundamentais do sistema, as diferenças observadas são da ordem de poucos MeV .

O estado fundamental $\eta_c(1S)$, por exemplo, foi obtido com massa de $2.9846 GeV$, em excelente acordo com o valor experimental de $2.9841 GeV$ reportado pelo PDG [9].

⁴ A notação J^{PC} representa os números quânticos de um méson, onde J corresponde ao momento angular total, P à paridade e C à conjugação de carga. Essa classificação é amplamente utilizada na espectroscopia de quarkônios para identificar os diferentes estados ligados.

De forma semelhante, o estado $J/\psi(1S)$ apresentou massa calculada de 3.1606 GeV , próxima do valor experimental de 3.0969 GeV . Os desvios encontrados permanecem compatíveis com aqueles normalmente observados em modelos não relativísticos baseados no potencial de Cornell.

Estado	J^{PC}	Nome	Este trabalho	Artigo [10]	PDG [9]
1^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(1S)$	2.9846	2.9832	2.9841
2^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(2S)$	3.58767	3.5861	3.6378
3^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(3S)$	4.00107	3.9995	-----
4^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(4S)$	4.34876	4.3472	-----
5^1S_0	0^{-+}	$\eta_c(5S)$	4.65922	-----	-----
1^3S_1	1^{--}	$J/\Psi(1S)$	3.16061	3.1589	3.0969
2^3S_1	1^{--}	$\Psi(2S)$	3.6892	3.6875	3.686097
3^3S_1	1^{--}	$\Psi(3S)$	4.08355	4.0819	-----
4^3S_1	1^{--}	$\Psi(4S)$	4.42143	4.4199	-----
5^3S_1	1^{--}	$\Psi(5S)$	4.72555	4.7241	-----
1^1P_1	1^{+-}	$h_c(1P)$	3.51431	3.5126	3.52537
2^1P_1	1^{+-}	$h_c(2P)$	3.92944	3.9278	-----
3^1P_1	1^{+-}	$h_c(3P)$	4.28001	4.2784	-----
1^3P_0	0^{++}	$\chi_{c0}(1P)$	3.51498	3.5132	3.41471
2^3P_0	0^{++}	$\chi_{c0}(2P)$	3.93041	3.9287	-----
3^3P_0	0^{++}	$\chi_{c0}(3P)$	4.28119	4.2796	-----
4^3P_0	0^{++}	$\chi_{c0}(4P)$	4.59443	4.5929	-----
1^3P_1	1^{++}	$\chi_{c1}(1P)$	3.51498	3.5132	3.51067
2^3P_1	1^{++}	$\chi_{c1}(2P)$	3.93041	3.9287	-----
3^3P_1	1^{++}	$\chi_{c1}(3P)$	4.28119	4.2796	-----
1^3P_2	2^{++}	$\chi_{c2}(1P)$	3.51498	3.5132	3.55617
2^3P_2	2^{++}	$\chi_{c2}(2P)$	3.93041	3.9287	-----
3^3P_2	2^{++}	$\chi_{c2}(3P)$	4.28119	4.2796	-----
1^3D_2	2^{--}	$\Psi_2(1D)$	3.77695	3.7752	-----
1^3D_3	3^{--}	$\Psi_3(1D)$	3.77695	3.7752	-----

Tabela 4.2: Massas dos estados de charmônio obtidas pelo método descrito no Capítulo 4.2 comparadas com resultados teóricos da literatura e com os valores experimentais compilados pelo Particle Data Group [9]. Todas as massas são apresentadas em GeV.

Para diversos estados excitados previstos pelo modelo, ainda não existem medidas experimentais suficientemente precisas ou atribuições espectroscópicas definitivas.

Nesses casos, os resultados apresentados constituem previsões teóricas do modelo adotado e podem servir como referência para futuras investigações experimentais.

A presença desses estados evidencia uma das principais vantagens dos modelos de potencial: além de reproduzir partículas já observadas, eles permitem prever a existência e as propriedades de estados ainda não completamente estabelecidos experimentalmente.

Além da comparação direta entre os estados cuja atribuição espectroscópica já é bem estabelecida, é possível utilizar os resultados obtidos para investigar a possível natureza de algumas ressonâncias observadas experimentalmente. Para isso, as massas calculadas foram comparadas com os valores compilados pelo PDG [9], buscando identificar quais estados previstos pelo modelo apresentam maior compatibilidade com as partículas observadas.

A Tabela 4.3 apresenta as associações propostas neste trabalho. Em cada caso, a identificação foi realizada com base na proximidade entre a massa calculada e a massa experimental reportada pelo PDG [9], levando em consideração também os números quânticos previstos pelo modelo.

Charmônio	J^{PC}	Meu trabalho	Estado	PDG	Margem de erro PDG
$\Psi(4040)$	1^{--}	4.08355	$\Psi(3S)$	4.0396	± 0.0043
$\Psi(4415)$	1^{--}	4.42143	$\Psi(4S)$	4.415	± 0.005
$\Psi(4660)$	1^{--}	4.72555	$\Psi(5S)$	4.623	± 0.010
$\Psi_2(3823)$	2^{--}	3.77695	$\Psi_2(1D)$	3.82351	± 0.00034
$\Psi_3(3842)$	3^{--}	3.77695	$\Psi_3(1D)$	3.84271	$\pm 0.00012 \pm 0.00016$
$\chi_{c0}(3860)$	0^{++}	3.93041	$\chi_{c0}(2P)$	3.862	$\pm 0.0026 \pm 0.004$
$\chi_{c0}(4500)$	0^{++}	4.59443	$\chi_{c0}(4P)$	4.474	± 0.0044

Tabela 4.3: Possíveis associações entre estados de charmônio observados experimentalmente e os estados espectroscópicos previstos pelo modelo desenvolvido neste trabalho. São apresentados os valores de massa calculados, as correspondentes identificações espectroscópicas propostas e os valores experimentais reportados pelo Particle Data Group [9].

Observa-se que diversas ressonâncias conhecidas do espectro do charmônio podem ser associadas de forma natural aos estados previstos pelo modelo. O estado $\psi(4040)$, por exemplo, apresenta excelente concordância com o estado $\psi(3S)$, enquanto as ressonâncias $\psi(4415)$ e $\psi(4660)$ mostram compatibilidade com os estados $\psi(4S)$ e $\psi(5S)$, respectivamente.

As diferenças observadas entre os valores calculados e experimentais permanecem pequenas quando comparadas à escala típica das massas envolvidas. Embora tais

associações devam ser interpretadas com cautela, elas demonstram o potencial do modelo para auxiliar na classificação espectroscópica de ressonâncias observadas experimentalmente.

Ainda que a Tabela 4.1 apresente quantitativamente as massas calculadas para os diferentes estados do sistema $c\bar{c}$, uma representação gráfica do espectro facilita a visualização da organização dos níveis de energia previstos pelo modelo. O Gráfico 4.1 mostra a distribuição das massas obtidas neste trabalho em função dos respectivos números quânticos J^{PC} , permitindo identificar as diferentes famílias espectroscópicas associadas aos estados S , P e D .

Observa-se que os estados pertencentes a uma mesma família apresentam comportamento sistemático, com aumento gradual da massa à medida que cresce o número quântico radial. Esse comportamento está diretamente relacionado à maior energia de ligação dos estados excitados, refletindo a estrutura do potencial efetivo utilizado na resolução da equação de Schrodinger.

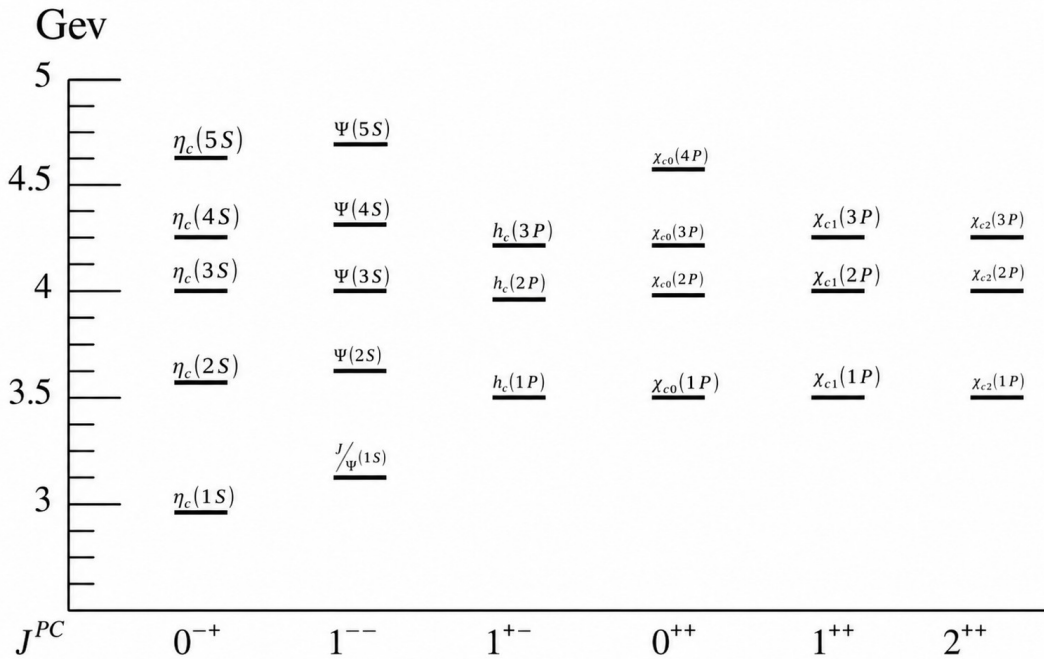


Gráfico 4.1: Espectro de massas dos estados ligados do sistema $c\bar{c}$ obtido neste trabalho por meio da resolução numérica da equação de Schrodinger com o potencial efetivo adotado. O eixo vertical representa as massas dos estados em GeV, enquanto o eixo horizontal organiza os estados de acordo com seus números quânticos J^{PC} . Cada linha horizontal corresponde à massa calculada para um estado espectroscópico específico, identificado pelo respectivo nome (η_c , J/ψ , h_c , χ_c , η_c , J/ψ , entre outros).

Por mais que o espectro calculado reproduza a estrutura esperada para os estados ligados do sistema $c\bar{c}$, sua validação depende da comparação com resultados experimentais. Para essa finalidade, os níveis de energia obtidos foram confrontados com as massas compiladas pelo PDG [9], permitindo avaliar quantitativamente a capacidade preditiva do modelo.

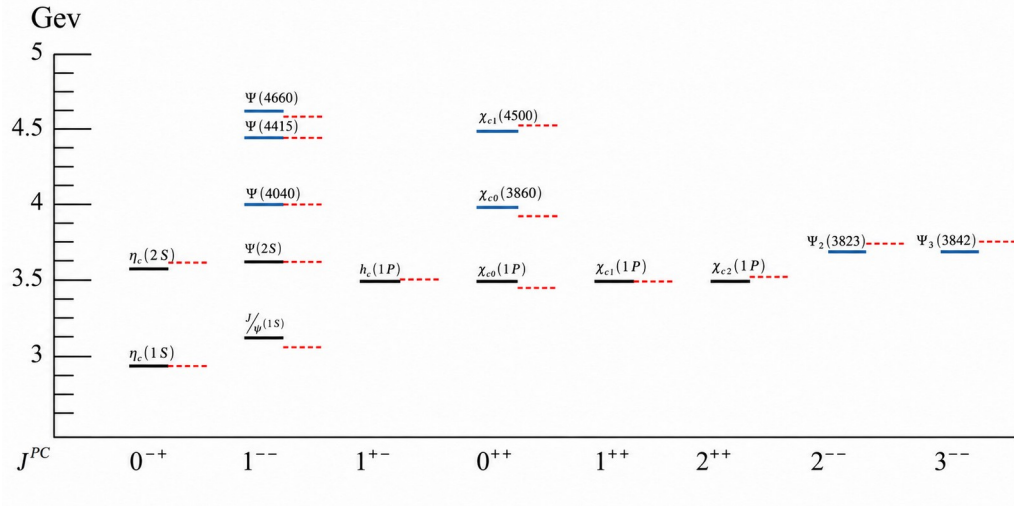


Gráfico 4.2: Comparação entre o espectro de massas calculado neste trabalho e os valores experimentais compilados pelo PDG [9]. O eixo vertical representa a massa dos estados em GeV, enquanto o eixo horizontal agrupa os estados segundo seus números quânticos J^{PC} . As linhas horizontais pretas correspondem às massas obtidas numericamente neste trabalho e as azuis também, apenas com a ressalva de que essas representam a associação feita na Tabela 4.3, enquanto as linhas vermelhas tracejadas representam os valores experimentais do PDG [9] para os estados correspondentes. A proximidade entre as linhas evidencia o grau de concordância entre o modelo e os dados experimentais.

De maneira geral, observa-se excelente concordância entre os resultados teóricos e experimentais. Para a maioria dos estados analisados, as diferenças entre as massas calculadas e os valores do PDG [9] permanecem pequenas, indicando que o potencial efetivo empregado reproduz satisfatoriamente a estrutura global do espectro do charmônio.

Para estimar um erro dos valores obtidos neste trabalho, comparei diretamente os resultados numéricos com os obtidos pelo artigo [10] e ao PDG [9] e realizei a diferença absoluta de cada estado,

$$\Delta_r = |M_{\text{trabalho}} - M_{\text{referência}}|, \quad (4.6)$$

onde o subíndice r no termo Δ é a referência usada. Os resultados estão representados na Tabela 4.4.

Estado	$\Delta_{[10]}$	$\Delta_{[9]}$
$\eta_c(1S)$	0.0014	0.0005
$\eta_c(2S)$	0.00157	0.05013
$\eta_c(3S)$	0.00157	-----
$\eta_c(4S)$	0.00156	-----
$\eta_c(5S)$	-----	-----
$J/\Psi(1S)$	0.00171	0.06371
$\Psi(2S)$	0.00170	0.00310
$\Psi(3S)$	0.00165	-----
$\Psi(4S)$	0.00153	-----
$\Psi(5S)$	0.00145	-----
$h_c(1P)$	0.00171	0.001106
$h_c(2P)$	0.00164	-----
$h_c(3P)$	0.00161	-----
$\chi_{c0}(1P)$	0.00178	0.10027
$\chi_{c0}(2P)$	0.00154	-----
$\chi_{c0}(3P)$	0.00159	-----
$\chi_{c0}(4P)$	0.00153	-----
$\chi_{c1}(1P)$	0.00178	0.00331
$\chi_{c1}(2P)$	0.00154	-----
$\chi_{c1}(3P)$	0.00159	-----
$\chi_{c2}(1P)$	0.00178	0.04119
$\chi_{c2}(2P)$	0.00154	-----
$\chi_{c2}(3P)$	0.00159	-----
$\Psi_2(1D)$	0.00175	-----
$\Psi_3(1D)$	0.00175	-----

Tabela 4.4: Diferença absoluta entre as massas obtidas neste trabalho e os valores de referência do artigo [10] e do Particle Data Group [9].

Além disso, calculei a porcentagem das diferenças dadas pela Tabela 4.4 dos estados que tiveram a menor e a maior diferença absoluta, as quais são, respectivamente, $\eta_c(1S)$ e $\chi_{c0}(1P)$ para ambas as referências. Os resultados obtidos foram de 0,04% a 0,05% em relação ao artigo [10] e 0,017% a 2,93% em comparação ao PDG [9].

As pequenas discrepâncias observadas são compatíveis com as limitações inerentes ao tratamento não relativístico e à ausência de alguns efeitos de ordem superior, como correções relativísticas, interações tensorais e o acoplamento spin-órbita.

Essa comparação evidencia que, apesar de sua simplicidade, o potencial de Cornell acrescido da interação hiperfina constitui uma aproximação eficaz para a descrição espectroscópica de sistemas formados por quarks pesados, reproduzindo com boa precisão tanto os estados já bem estabelecidos quanto diversas ressonâncias observadas experimentalmente.

Considerações Finais

5

O presente trabalho teve como objetivo investigar a espectroscopia do sistema harmônio por meio da resolução numérica da equação de Schrodinger utilizando um modelo não relativístico baseado no potencial de Cornell. Para isso, foi desenvolvido um percurso teórico e computacional que partiu de problemas fundamentais da Mecânica Quântica até alcançar a descrição de um sistema físico de interesse atual na Física de Partículas.

Inicialmente, foram revisados conceitos fundamentais necessários para a compreensão da dinâmica de estados ligados quânticos. A análise do poço de potencial infinito permitiu introduzir as ideias de quantização da energia e condições de contorno. Em seguida, o estudo do oscilador harmônico quântico evidenciou a riqueza matemática da Mecânica Quântica e a importância dos métodos analíticos na obtenção de soluções físicas. Posteriormente, a solução do átomo de hidrogênio forneceu o primeiro exemplo de um sistema descrito por um potencial central, exigindo a aplicação da técnica de separação de variáveis em coordenadas esféricas. Esse tratamento permitiu obter naturalmente os números quânticos, bem como as funções de onda estacionárias que caracterizam os estados ligados do sistema.

A partir dessa base conceitual, foi possível avançar para o estudo de sistemas mais complexos, nos quais soluções analíticas deixam de existir. Nesse contexto, a utilização de métodos numéricos mostrou-se fundamental. A aplicação desses métodos ao átomo de hidrogênio serviu como etapa intermediária de validação, demonstrando a capacidade das técnicas computacionais empregadas em reproduzir resultados conhecidos da literatura antes de serem aplicadas ao sistema de interesse principal deste trabalho.

O estudo do harmônio revelou-se particularmente interessante por representar uma ponte entre a Mecânica Quântica não relativística e a Física de Partículas. Embora a interação entre quarks seja, em princípio, descrita pela Cromodinâmica Quântica, a complexidade dos efeitos não perturbativos torna necessária a utilização de modelos efetivos. Nesse sentido, o potencial de Cornell, somado a interação spin-spin das partículas, mostrou-se capaz de incorporar, de forma simples e eficiente, as características únicas da interação forte.

A resolução numérica da equação radial de Schrodinger permitiu determinar os níveis de energia associados a diversos estados do sistema c.c. A partir desses resultados, foram calculadas as massas dos estados ligados e realizadas comparações tanto com previsões teóricas encontradas na literatura quanto com os valores experimentais compilados pelo Particle Data Group [9]. Os resultados

obtidos apresentaram boa concordância com os dados experimentais disponíveis, evidenciando que o modelo adotado é capaz de reproduzir satisfatoriamente a estrutura global do espectro do charmônio.

Além da reprodução de estados já estabelecidos experimentalmente, o trabalho permitiu discutir possíveis associações espectroscópicas para determinadas ressonâncias observadas no espectro do charmônio. Embora uma análise definitiva exija modelos mais sofisticados e a inclusão de efeitos adicionais, os resultados obtidos demonstram o potencial da abordagem empregada como ferramenta para o estudo e interpretação de sistemas formados por quarks pesados.

Um aspecto particularmente importante deste trabalho foi o desenvolvimento de competências relacionadas à modelagem matemática, programação científica e análise numérica. A utilização do software Wolfram não apenas possibilitou a obtenção dos resultados apresentados, mas também permitiu visualizar funções de onda, densidades de probabilidade e espectros de energia, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos fenômenos estudados.

Cabe destacar que este trabalho também se insere em uma linha de pesquisa desenvolvida no âmbito do projeto do qual a autora participa, a Escola de Talentos do Instituto Principia. Estudos anteriores realizados por João Marques Bento P. Neto, Murilo Oliveira Pires e Matheus Roselli Ravani [15] exploraram a espectroscopia de quarkônios pesados utilizando abordagens semelhantes, servindo como importantes referências para o desenvolvimento desta monografia. A presente investigação busca dar continuidade a esses esforços, contribuindo para a consolidação das atividades de pesquisa desenvolvidas pelo grupo e ampliando a discussão sobre a aplicação de métodos numéricos ao estudo de sistemas hadrônicos.

Por fim, diversas extensões podem ser consideradas em trabalhos futuros. Entre elas destacam-se a inclusão de correções relativísticas, interações spin-órbita, termos tensoriais e efeitos dependentes de spin que não foram considerados explicitamente neste estudo. Além disso, a metodologia empregada pode ser aplicada ao sistema bottomônio ($b\bar{b}$) cuja maior massa dos constituintes torna a aproximação não relativística ainda mais adequada. Também seria interessante investigar estados exóticos recentemente observados experimentalmente, como tetraquarks e moléculas hadrônicas, cuja natureza permanece objeto de intenso debate na comunidade científica.

Mais do que a obtenção de resultados específicos, este trabalho evidencia como conceitos fundamentais da Mecânica Quântica, frequentemente apresentados de forma abstrata em cursos introdutórios, podem ser utilizados para compreender sistemas reais investigados na Física contemporânea. O caminho percorrido desde o poço de potencial infinito até a espectroscopia do charmônio demonstra que ferramentas matemáticas relativamente simples, quando combinadas com métodos numéricos adequados, são capazes de fornecer descrições notavelmente precisas de fenômenos que ocorrem na escala subatômica. Nesse sentido, espera-se que este trabalho contribua não apenas para o estudo do sistema $c\bar{c}$, mas também para

o fortalecimento da formação científica proporcionada pelo projeto e para futuras investigações na área de Física de Partículas.

-
- [1] Brian Robert Martin e Graham Shaw. **Particle physics**. 2008. isbn: 978-0-470-03294-7
 - [2] Rehm, Jeremy. **The four fundamental forces of nature**. Live Science (out. de 2019). URL: https://www.livescience.com/the-fundamental-forces-of-nature.html?utm_source=
 - [3] D. J. Griffiths e D. F. Schroeter. **Introduction to elementary particles**. 2008. isbn: 978-3-527-40601-2
 - [4] D. J. Griffiths. **Introduction to quantum mechanics**. 2ª ed. 2005. isbn: 0-13-191175-9
 - [5] Francis Halzen e Alan D. Martin. **Quarks and Leptons: An introductory course in modern particle physics**. 1984. isbn 0-471-88741-2
 - [6] K.S. Krane. **Modern Physics**. 3rd Edition. 2012. isbn: 9781118210093.
 - [7] George B. Arfken e Hans J. Weber. **Mathematical Methods for Physicists**. 7ª ed. 2007. isbn: 978-85-352-2050-6
 - [8] Mark Thomson. **Modern particle physics**. New York: Cambridge University Press, out. de 2013. isbn: 978-1-107-03426-6, 978-1-139-52536-7. doi: 10.1017/CBO9781139525367
 - [9] S. Navas *et al.* **Particle Data Group**. (2024) and 2025 update. Phys. Rev. D 110, 030001
 - [10] I. S. Alam e S. B. Maywenson. **Revisiting the charmonium spectra within the non-relativistic framework using the Matrix Numerov method**. J. Phys. Conf. Ser. 2498:1 (2023), 012013. doi: 10.1088/1742-6596/2498/1/012013
 - [11] Voloshin, M. B. **Charmonium**. Minneapolis: University of Minnesota, 2008. arXiv:0711.4556 [hep-ph].
 - [12] Augustin et al. **Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation**. Physical Review Letters 33, 1406 (1974). doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1406>
 - [13] Aubert et al. **Experimental Observation of a Heavy Particle J**. Physical Review Letters 33, 1404 (1974). doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.33.1404>
 - [14] A R Dzierba. **The search for QCD exotica**. Bulletin of the American Physical Society 40:10 (out. de 1995). URL: <https://www.osti.gov/biblio/255416>
 - [15] Marques Bento P. Neto, João; Oliveira Pires, Murilo e Roselli Ravani, Matheus. **A formação de estados de charmônio na QCD**. 2024. URL: <https://www.institutoprincipia.org/escola-de-talentos>