

Buracos negros de Schwarzschild

A Solução de Schwarzschild: Geometria, Interior Estelar, Simetrias e Movimento de Partículas e Luz

Tópicos abordados:

Solução de Schwarzschild (métrica estática e esfericamente simétrica)

· Solução de Schwarzschild interior

Campos de Killing, quantidades conservadas e constantes de movimento

Solução de Schwarzschild exterior — geodésicas tipo-tempo e tipo-luz

Disciplina: Relatividade Geral

Fortaleza, Ceará — 12 de julho de 2026

Conteúdo

Resumo	2
Introdução	3
1 Desenvolvimento	4
1.1 Solução de Schwarzschild: métrica estática e esfericamente simétrica	4
1.1.1 O ansatz estático e esfericamente simétrico	4
1.1.2 Métrica de Schwarzschild exterior e o teorema de Birkhoff	4
1.2 Solução de Schwarzschild interior	6
1.2.1 Fluido perfeito e as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff . . .	7
1.2.2 Solução para densidade uniforme	7
1.2.3 O limite de Buchdahl	8
1.3 Campos de Killing, quantidades conservadas e constantes de movimento . .	8
1.3.1 Definição e equação de Killing	9
1.3.2 Os campos de Killing da métrica de Schwarzschild	9
1.3.3 Quantidades conservadas ao longo de geodésicas	9
1.4 Solução de Schwarzschild exterior: geodésicas tipo-tempo	10
1.4.1 Redução ao problema radial	10
1.4.2 O potencial efetivo	11
1.4.3 Órbitas circulares e a última órbita circular estável (ISCO)	11
1.4.4 Órbitas ligadas e a precessão do periélio	11
1.5 Solução de Schwarzschild exterior: geodésicas tipo-luz	12
1.5.1 Redução ao problema radial e o parâmetro de impacto	12
1.5.2 A esfera de fótons	13
1.5.3 Captura, espalhamento e o parâmetro de impacto crítico	13
1.5.4 Deflexão gravitacional da luz	13
2 Conclusão	15
Referências	16
Apêndice A — Revisão de Conceitos Básicos de Geometria Diferencial	17
A.1 Métrica e elemento de linha	17
A.2 Símbolos de Christoffel e derivada covariante	17
A.3 Geodésicas	17
A.4 Curvatura: tensores de Riemann, Ricci e escalar	18
A.5 Campos de Killing	18
A.6 Equações de campo de Einstein	18

Resumo

Este relatório apresenta uma revisão técnica da solução de Schwarzschild, o resultado mais fundamental da Relatividade Geral para a descrição de corpos esféricos estáticos e, no limite de compactação extrema, de buracos negros. Parte-se da imposição de simetria estática e esfericamente simétrica ao tensor métrico e da resolução das equações de campo de Einstein no vácuo, obtendo-se a métrica exterior de Schwarzschild e discutindo-se o teorema de Birkhoff e o significado físico do raio de Schwarzschild. Em seguida, deriva-se a solução interior para uma estrela idealizada de densidade de energia uniforme, a partir da equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, culminando no limite de Buchdahl, que estabelece a compacidade máxima permitida a qualquer estrela estática e aponta, em bases puramente geométricas, para a inevitabilidade do colapso gravitacional. As simetrias do espaço-tempo resultante são então formalizadas por meio dos campos de Killing, dos quais decorrem as quantidades conservadas — energia e momento angular específicos — que permitem reduzir o movimento geodésico a um problema unidimensional efetivo. Esse formalismo é aplicado ao estudo completo das geodésicas tipo-tempo, incluindo órbitas circulares, a última órbita estável (ISCO) e a precessão do periélio, e das geodésicas tipo-luz, incluindo a esfera de fótons, o parâmetro de impacto crítico e a deflexão gravitacional da luz. Ao final, discute-se como esses resultados, já contidos na solução de Schwarzschild de 1916, permanecem centrais para a física contemporânea de buracos negros, sustentando desde os testes clássicos da Relatividade Geral até a interpretação das imagens de sombras de buracos negros obtidas pelo Event Horizon Telescope.

Palavras-chave: Relatividade Geral; Solução de Schwarzschild; Buracos Negros; Campos de Killing; Geodésicas.

Introdução

A Relatividade Geral (RG), formulada por Einstein em 1915, descreve a gravitação não como uma força que atua à distância, mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de energia e momento. O conteúdo dinâmico da teoria está condensado nas *equações de campo de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, construído a partir da curvatura do espaço-tempo, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria e dos campos presentes, G é a constante gravitacional de Newton, c a velocidade da luz e Λ a constante cosmológica (que, para os problemas tratados aqui, será tomada igual a zero, por ser irrelevante em escalas estelares). Trata-se de um sistema de dez equações diferenciais parciais, não lineares e acopladas para as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Encontrar soluções exatas é, em geral, extremamente difícil — a não ser que se imponham simetrias que simplifiquem drasticamente o problema.

A simetria mais natural para descrever o campo gravitacional de uma estrela isolada e não rotacionante é a simetria esférica estática. Sob essa hipótese, Karl Schwarzschild obteve, ainda em 1916, duas soluções complementares:

- a *solução exterior*, válida no vácuo fora da matéria que gera o campo, relevante para o espaço-tempo ao redor de estrelas, planetas e buracos negros;
- a *solução interior*, válida dentro de uma estrela idealizada como um fluido perfeito de densidade de energia, que se conecta suavemente à solução exterior na superfície da estrela.

Compreender essas duas soluções exige, além de resolver as equações de campo, entender as simetrias do espaço-tempo resultante — formalizadas pelos *campos de Killing* — e como elas se traduzem em leis de conservação ao longo do movimento de partículas e de luz. Esse é o fio condutor deste relatório: da geometria à dinâmica, das equações de campo às trajetórias observáveis.

O texto está organizado da seguinte forma: a seção de Desenvolvimento é dividida em cinco partes, correspondentes aos tópicos solicitados — (i) a construção da métrica estática e esfericamente simétrica e a solução exterior no vácuo; (ii) a solução interior de Schwarzschild para uma estrela de densidade uniforme; (iii) os campos de Killing do espaço-tempo de Schwarzschild e as quantidades conservadas associadas; (iv) a análise das geodésicas tipo-tempo, que descrevem o movimento de partículas massivas; e (v) a análise das geodésicas tipo-luz (nulas), que descrevem a trajetória de fótons. A Conclusão sintetiza os resultados e suas implicações físicas, e o Apêndice revisa os conceitos matemáticos básicos de geometria diferencial utilizados ao longo do relatório.

1 Desenvolvimento

1.1 Solução de Schwarzschild: métrica estática e esfericamente simétrica

O primeiro passo para resolver as equações de Einstein no contexto de um corpo esférico e estático é escrever a forma mais geral possível da métrica compatível com essas simetrias, e só então impor as equações de campo para fixar as funções livres que nela aparecem.

1.1.1 O *ansatz* estático e esfericamente simétrico

Um espaço-tempo é dito *estático* quando admite um campo de Killing tipo-tempo ortogonal a uma família de hipersuperfícies (não há termos cruzados $dt dr$, $dt d\theta$ ou $dt d\varphi$, e nenhuma componente da métrica depende de t), e *esfericamente simétrico* quando admite o grupo de isometrias $SO(3)$ atuando nas hipersferas $r = \text{constante}$. Sob essas duas hipóteses, o elemento de linha mais geral pode sempre ser escrito, em coordenadas (t, r, θ, φ) , na forma

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

em que $\Phi(r)$ e $\Lambda(r)$ são duas funções a determinar, e o termo $r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ é a métrica usual da esfera de raio r , que garante que a área de cada esfera $r = \text{constante}$ seja $4\pi r^2$ — a definição do chamado *raio de área* (ou raio-curvatura), coordenada radial usada nesse sistema.

1.1.2 Métrica de Schwarzschild exterior e o teorema de Birkhoff

Fora da matéria que produz o campo gravitacional, o tensor energia-momento se anula, $T_{\mu\nu} = 0$, e as equações de Einstein (com $\Lambda_c = 0$) reduzem-se à condição de vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

Christoffel e Ricci para o *ansatz* estático e esfericamente simétrico Para a métrica

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}c^2 dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^{21}. \quad (4)$$

¹Aqui $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ denota o elemento de ângulo sólido da esfera unitária, com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

calculando os símbolos de Christoffel não nulos (ver Apêndice A) e, a partir deles, as componentes do tensor de Ricci, obtém-se

$$R_{tt} = e^{2\Phi-2\Lambda} \left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{2\Phi'}{r} \right], \quad (5)$$

$$R_{rr} = -\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + \frac{2\Lambda'}{r}, \quad (6)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda} [1 + r(\Phi' - \Lambda')] - 1, \quad R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (7)$$

Essas expressões são puramente geométricas — resultado do cálculo de curvatura — e ainda *não* usam a condição de vácuo.

Primeira equação: a combinação $R_{tt}/e^{2\Phi} + R_{rr}/e^{2\Lambda}$ Antes de impor qualquer condição, monte essa combinação específica:

$$\frac{R_{tt}}{e^{2\Phi}} + \frac{R_{rr}}{e^{2\Lambda}} = e^{-2\Lambda} \left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{2\Phi'}{r} \right] + e^{-2\Lambda} \left[-\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + \frac{2\Lambda'}{r} \right]. \quad (8)$$

Os termos Φ'' , Φ'^2 e $\Phi'\Lambda'$ se cancelam identicamente — isso vale para quaisquer funções $\Phi(r)$, $\Lambda(r)$, sendo pura álgebra. Sobra

$$\frac{R_{tt}}{e^{2\Phi}} + \frac{R_{rr}}{e^{2\Lambda}} = \frac{2}{r} e^{-2\Lambda} (\Phi' + \Lambda'). \quad (9)$$

Agora impomos o vácuo, $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$ separadamente. O lado esquerdo se anula e, como $e^{-2\Lambda} \neq 0$ e $r \neq 0$,

$$\Phi'(r) + \Lambda'(r) = 0 \implies \Phi(r) + \Lambda(r) = \text{constante}. \quad (10)$$

Exigindo que a métrica se torne assintoticamente plana ($\Phi, \Lambda \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$), a constante deve ser nula, de modo que

$$\Lambda(r) = -\Phi(r), \quad \text{isto é,} \quad g_{tt} g_{rr} = -1. \quad (11)$$

Segunda equação: $R_{\theta\theta} = 0$ Com $\Lambda = -\Phi$, temos $\Phi' - \Lambda' = 2\Phi'$, de modo que

$$R_{\theta\theta} = 0 \implies e^{2\Phi} [1 + 2r\Phi'] = 1. \quad (12)$$

Observando que $e^{2\Phi}(1 + 2r\Phi') = \frac{d}{dr} [r e^{2\Phi}]$, a equação se reduz a

$$\frac{d}{dr} (r e^{2\Phi}) = 1 \implies r e^{2\Phi} = r - \frac{2GM}{c^2}, \quad (13)$$

onde a constante de integração já foi escrita como $-2GM/c^2$, por conveniência. Logo,

$$e^{2\Phi(r)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (14)$$

Identificação da constante No limite de campos fracos e velocidades não relativísticas, a equação de geodésica temporal se reduz a $\ddot{x} = -\nabla\Phi_N$, com $g_{tt} \approx -(1 + 2\Phi_N/c^2)$. Comparando,

$$1 - \frac{2GM}{c^2 r} \approx 1 + \frac{2\Phi_N(r)}{c^2} \implies \Phi_N(r) = -\frac{GM}{r}, \quad (15)$$

que é exatamente o potencial newtoniano de uma massa pontual M . A constante M é identificada com a massa total do corpo central, medida por um observador distante através da atração gravitacional que ele produz (massa de Schwarzschild, ou massa ADM/Komar neste caso estático).

Resultado final (métrica de Schwarzschild)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (16)$$

Ou simplismente,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s/r} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (17)$$

com o *raio de Schwarzschild* definido por

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}. \quad (18)$$

Essa métrica é válida em todo o espaço vazio ao redor de qualquer distribuição de massa M com simetria esférica, independentemente de a fonte ser estática, pulsante ou em colapso — resultado conhecido como *teorema de Birkhoff*: a solução de vácuo esfericamente simétrica das equações de Einstein é necessariamente estática (e é exatamente a métrica de Schwarzschild) na região exterior à matéria. Isso é um forte análogo relativístico do teorema de Newton sobre o campo gravitacional externo de distribuições de massa esfericamente simétricas.

Para $r = r_s$, as componentes g_{tt} e g_{rr} tornam-se singulares nesse sistema de coordenadas; trata-se, porém, de uma *singularidade de coordenadas* (removível por uma mudança apropriada de coordenadas, como as de Eddington–Finkelstein ou Kruskal–Szekeres), e não de uma singularidade física — o escalar de curvatura de Kretschmann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \propto M^2/r^6$, permanece finito em $r = r_s$, só divergindo genuinamente em $r = 0$. Para o Sol, $r_s \approx 2,95$ km, muito menor que o raio solar; assim, a região $r \leq r_s$ nunca é atingida no vácuo exterior de estrelas ordinárias, sendo relevante apenas para objetos extremamente compactos — os buracos negros.

1.2 Solução de Schwarzschild interior

A métrica exterior descreve o vácuo fora da estrela, mas nada diz sobre a geometria em seu interior, onde $T_{\mu\nu} \neq 0$. Para obter a solução interior, Schwarzschild considerou o

modelo mais simples possível de fonte: um *fluido perfeito estático de densidade de energia constante*, $\rho(r) = \rho_0$ para $0 \leq r \leq R$, onde R é o raio da estrela — uma idealização razoável para estrelas de baixa compressibilidade, ainda que fisicamente irrealista para estrelas reais (nas quais a densidade cresce em direção ao centro).

1.2.1 Fluido perfeito e as equações de Tolman–Oppenheimer–Volkoff

Para um fluido perfeito em equilíbrio hidrostático, o tensor energia-momento é $T_{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}$, em que $\rho(r)$ é a densidade de energia, $P(r)$ a pressão e u^μ a quadrivelocidade do fluido. Definindo a *função massa*

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (19)$$

as equações de Einstein aplicadas ao ansatz estático e esfericamente simétrico da Seção 1.1, agora com fonte material, fornecem $e^{2\Lambda(r)} = [1 - 2Gm(r)/(c^2 r)]^{-1}$, e a condição de equilíbrio hidrostático entre pressão e gravidade toma a forma da célebre *equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV)*:

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{G(\rho + P/c^2)(m(r) + 4\pi r^3 P/c^2)}{r^2 (1 - 2Gm(r)/(c^2 r))}. \quad (20)$$

Essa equação é a generalização relativística da equação newtoniana de equilíbrio hidrostático, $dP/dr = -Gm(r)\rho/r^2$, da qual se recupera no limite $P \ll \rho c^2$ e $2Gm/(c^2 r) \ll 1$. Ela mostra que, na RG, tanto a pressão quanto o próprio volume (via o fator $4\pi r^3 P/c^2$) contribuem para o *peso* gravitacional do fluido — uma diferença qualitativa importante em relação à gravitação newtoniana, responsável, por exemplo, pela existência de uma massa máxima para estrelas de nêutrons.

1.2.2 Solução para densidade uniforme

Para $\rho(r) = \rho_0$ constante, a função massa é simplesmente $m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3$, de modo que, na superfície $r = R$, $m(R) = M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3$ coincide com a massa que aparece na métrica exterior — garantindo a continuidade de $e^{2\Lambda}$ em $r = R$. É conveniente reintroduzir o raio de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$. Integrando a equação TOV com essa densidade constante, e impondo que a pressão se anule na superfície, $P(R) = 0$ (condição de contorno que define a fronteira da estrela), obtêm-se as duas funções métricas interiores:

$$e^{2\Lambda(r)} = \frac{1}{1 - r_s r^2/R^3}, \quad (21)$$

$$e^{\Phi(r)} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{R^3}}, \quad (22)$$

de modo que o elemento de linha completo no interior ($0 \leq r \leq R$) é

$$ds^2 = - \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{R^3}} \right]^2 c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_s r^2/R^3} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (23)$$

e o campo de pressão correspondente é

$$P(r) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - r_s r^2 / R^3} - \sqrt{1 - r_s / R}}{3\sqrt{1 - r_s / R} - \sqrt{1 - r_s r^2 / R^3}}. \quad (24)$$

Pode-se verificar diretamente que $P(R) = 0$, como exigido, e que a pressão cresce monotonicamente em direção ao centro, atingindo seu valor máximo em $r = 0$:

$$P_c \equiv P(0) = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - r_s / R}}{3\sqrt{1 - r_s / R} - 1}. \quad (25)$$

1.2.3 O limite de Buchdahl

A expressão para a pressão central revela algo notável: o denominador $3\sqrt{1 - r_s / R} - 1$ anula-se quando

$$\frac{r_s}{R} = \frac{8}{9} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{M}{R} = \frac{4c^2}{9G}. \quad (26)$$

Para qualquer compacidade r_s / R que se aproxime desse valor, a pressão central diverge, $P_c \rightarrow \infty$; para $r_s / R > 8/9$, não existe solução estática regular — nenhuma pressão, por maior que seja, consegue sustentar o fluido contra o colapso gravitacional. Esse resultado, conhecido como *limite (ou teorema) de Buchdahl*, é mais geral do que a solução de densidade uniforme aqui obtida: Buchdahl demonstrou, em 1959, que *nenhuma* estrela estática, esfericamente simétrica, feita de um fluido com densidade não crescente para fora, pode ter compacidade $2GM/(c^2 R)$ maior que $8/9$. É um dos primeiros resultados rigorosos da RG a apontar, de forma quantitativa, para a inevitabilidade do colapso gravitacional em objetos suficientemente compactos, antecipando fisicamente a existência de buracos negros mesmo antes de qualquer discussão detalhada sobre horizontes de eventos.

Vale notar que o limite de Buchdahl ($2GM/(c^2 R) < 8/9$) é distinto — e mais restritivo — do que a simples exigência de que a estrela seja maior que seu próprio raio de Schwarzschild ($R > r_s$): há uma faixa $8/9 < r_s / R < 1$ em que a estrela ainda está fora de seu horizonte, mas já não pode existir em equilíbrio hidrostático estável.

1.3 Campos de Killing, quantidades conservadas e constantes de movimento

As simetrias impostas na Seção 1.1 — estaticidade e simetria esférica — não são apenas um artifício técnico para simplificar a busca da solução; elas correspondem a *isometrias* genuínas do espaço-tempo, geradas por *campos vetoriais de Killing*. Esses campos desempenham, na RG, o papel que translações e rotações desempenham na mecânica newtoniana: cada simetria contínua do espaço-tempo produz, pelo teorema de Noether, uma quantidade conservada ao longo do movimento de partículas livres.

1.3.1 Definição e equação de Killing

Um campo vetorial ξ é dito de Killing se o fluxo que ele preserva a métrica, isto é, se a derivada de Lie da métrica ao longo de ξ se anula: $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Em termos da derivada covariante, essa condição equivale à *equação de Killing*:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (27)$$

isto é, a parte simétrica de $\nabla_\mu \xi_\nu$ deve se anular. Geometricamente, isso significa que deslocar cada ponto do espaço-tempo ao longo de ξ por um parâmetro infinitesimal não altera as distâncias — ξ gera uma isometria.

1.3.2 Os campos de Killing da métrica de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild, exterior ou interior, admite exatamente quatro campos de Killing independentes, refletindo as simetrias impostas na sua construção:

- $\xi_{(t)} = \partial_t$ — gerador da estaticidade (translação temporal), único a menos de normalização, refletindo que nenhuma componente da métrica depende de t ;
- $\xi_{(\varphi)} = \partial_\varphi$ — gerador de rotações em torno do eixo z ;
- mais dois geradores independentes de rotação em torno dos outros dois eixos cartesianos, que, junto com $\xi_{(\varphi)}$, fecham a álgebra $\mathfrak{so}(3)$ do grupo de rotações.

O grupo de isometrias do espaço-tempo de Schwarzschild é, portanto, $\mathbb{R} \times SO(3)$: a estrutura $\mathbb{R}$ da translação temporal (estaticidade) multiplicada pelo grupo de rotações espaciais $SO(3)$ (simetria esférica). O gerador $\xi_{(t)}$ é tipo-tempo na região exterior ao horizonte ($r > r_s$), tornando-se nulo exatamente em $r = r_s$ e tipo-espaço dentro dele — fato que fundamenta a impossibilidade de um observador permanecer estático dentro do horizonte.

1.3.3 Quantidades conservadas ao longo de geodésicas

A relevância física dos campos de Killing para o movimento de partículas livres decorre do seguinte resultado geral: se ξ^μ é um campo de Killing e $x^\mu(\tau)$ é uma geodésica com quadrivelocidade $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, então a quantidade escalar

$$C_\xi \equiv \xi_\mu u^\mu \quad (28)$$

é constante ao longo da geodésica, $dC_\xi/d\tau = 0$. A demonstração é direta a partir da equação geodésica $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ combinada com a equação de Killing: o termo simétrico em $(\mu\nu)$ que surgiria de $\nabla_\nu \xi_\mu$ é cancelado, pois $u^\mu u^\nu$ é simétrico enquanto $\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0$.

Aplicando esse resultado aos dois geradores relevantes para o movimento no plano orbital ($\theta = \pi/2$, sem perda de generalidade, dada a simetria esférica), obtêm-se as duas constantes de movimento fundamentais da dinâmica em Schwarzschild:

Energia específica (por unidade de massa de repouso, associada a $\xi_{(t)}$):

$$e \equiv -\frac{\xi_{(t)} \cdot u}{c^2} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \frac{dt}{d\tau}. \quad (29)$$

Momento angular específico (associado a $\xi_{(\varphi)}$):

$$\ell \equiv \xi_{(\varphi)} \cdot u = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (30)$$

A conservação de ℓ é exatamente o análogo relativístico da conservação newtoniana do momento angular em um campo central e, como no caso newtoniano, implica que o movimento é *planar* — a trajetória permanece inteiramente no plano $\theta = \pi/2$ escolhido inicialmente, uma consequência direta da simetria esférica. A conservação de e é o análogo relativístico da conservação de energia mecânica por unidade de massa; a diferença essencial em relação ao caso newtoniano é o fator $(1 - r_s/r)$, que codifica o redshift gravitacional do tempo próprio do observador em queda em relação ao tempo coordenado t (tempo próprio de um observador estático no infinito).

Essas duas quantidades — e e ℓ , junto com a condição de normalização da quadri-velocidade (ou do vetor tangente, no caso de geodésicas nulas) — são exatamente o que permite reduzir o problema geodésico geral, de quatro equações diferenciais acopladas de segunda ordem, a uma única equação de primeira ordem para $r(\tau)$ (ou $r(\lambda)$), como será explorado nas Seções 1.4 e 1.5.

1.4 Solução de Schwarzschild exterior: geodésicas tipo-tempo

Partículas massivas em queda livre — planetas, sondas espaciais, qualquer corpo sujeito apenas à gravidade — seguem geodésicas tipo-tempo do espaço-tempo de Schwarzschild exterior. Usando as constantes de movimento e a normalização da quadri-velocidade, é possível reduzir o problema a uma equação unidimensional formalmente idêntica à de uma partícula em um potencial efetivo newtoniano.

1.4.1 Redução ao problema radial

Para uma geodésica tipo-tempo, a quadri-velocidade satisfaz a normalização $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$. Restringindo o movimento ao plano equatorial $\theta = \pi/2$ ($d\theta/d\tau = 0$, sempre possível pela simetria esférica) e usando as constantes e e ℓ definidas na Seção 1.3 para eliminar $dt/d\tau$ e $d\varphi/d\tau$, a normalização torna-se, após multiplicação por $(1 - r_s/r)$:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{c^2 r^2}\right). \quad (31)$$

Essa é uma equação de primeira ordem exclusivamente em $r(\tau)$ — o problema de dois corpos relativístico foi reduzido, tal como no caso newtoniano, a um problema radial unidimensional efetivo.

1.4.2 O potencial efetivo

Reescrevendo a equação anterior na forma familiar de conservação de energia, $(dr/d\tau)^2/2 + V_{\text{eff}}(r) = (e^2 - c^4)/(2c^2)$ (constante), identifica-se o *potencial efetivo*:

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3}. \quad (32)$$

Os dois primeiros termos são exatamente o potencial efetivo newtoniano (gravitacional mais centrífugo); o terceiro termo, $\propto 1/r^3$, é uma correção puramente relativística, ausente na mecânica newtoniana. É esse termo que é responsável por toda a fenomenologia qualitativamente nova do movimento em Schwarzschild:

- para ℓ pequeno o suficiente, o termo $-GM\ell^2/(c^2 r^3)$ domina em pequenas distâncias e faz $V_{\text{eff}} \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 0$, eliminando a barreira centrífuga que, na física newtoniana, sempre impede a queda até $r = 0$; isso permite a captura direta de partículas com momento angular abaixo de um valor crítico;
- órbitas circulares, definidas por $dV_{\text{eff}}/dr = 0$, existem apenas para $\ell^2 \geq 12(GM/c)^2$, e apenas uma fração delas é estável.

1.4.3 Órbitas circulares e a última órbita circular estável (ISCO)

Impondo simultaneamente $dV_{\text{eff}}/dr = 0$ (órbita circular) e $d^2V_{\text{eff}}/dr^2 = 0$ (limiar de estabilidade), encontra-se o raio da *última órbita circular estável* (ISCO, do inglês *innermost stable circular orbit*):

$$r_{\text{ISCO}} = \frac{6GM}{c^2} = 3r_s. \quad (33)$$

Para $r < r_{\text{ISCO}}$ (mas ainda $r > 3GM/c^2$, o raio da órbita fóton circular limite para partículas ultrarrelativísticas, discutido na Seção 1.5), órbitas circulares ainda existem, mas são instáveis: qualquer perturbação radial infinitesimal leva a partícula a espiralar para dentro do horizonte ou a escapar para o infinito. Esse resultado é de importância astrofísica central: em discos de acreção ao redor de buracos negros e estrelas compactas, a matéria orbita de forma aproximadamente circular e estável apenas até r_{ISCO} , região interna à qual cai rapidamente em direção ao horizonte — definindo a borda interna observável do disco e sendo usado para estimar spins e massas de buracos negros a partir de espectros de raios X.

1.4.4 Órbitas ligadas e a precessão do periélio

Para energias $e < c^2$ (movimento ligado, análogo às órbitas elípticas newtonianas), a partícula oscila entre um raio mínimo (periélio) e um raio máximo (afélio) do potencial efetivo. Diferentemente do caso newtoniano — em que órbitas ligadas em um potencial $1/r$ são elipses fechadas, um resultado especial associado à simetria extra do problema de Kepler —, na RG o termo adicional $-GM\ell^2/(c^2 r^3)$ quebra essa degenerescência, e a

órbita deixa de se fechar: o periélio *precessiona* a cada revolução. Para órbitas quase circulares de semieixo maior a e excentricidade ε pequena, a precessão por órbita é dada, em primeira ordem em r_s/a , por

$$\Delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - \varepsilon^2)}. \quad (34)$$

Para Mercúrio, essa fórmula prevê uma precessão de aproximadamente 43 segundos de arco por século (após descontar as perturbações newtonianas dos demais planetas) — valor que permaneceu inexplicado pela mecânica celeste newtoniana durante décadas e que foi um dos primeiros testes observacionais bem-sucedidos da Relatividade Geral, já em 1915.

1.5 Solução de Schwarzschild exterior: geodésicas tipo-luz

Fótons — e, em geral, qualquer partícula sem massa — seguem geodésicas nulas, caracterizadas por vetor tangente $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ (λ um parâmetro afim, não o tempo próprio, que se anula identicamente ao longo dessas trajetórias) satisfazendo $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$. O procedimento é inteiramente análogo ao da Seção 1.4, com as mesmas constantes de movimento $E = -\xi_{(t)} \cdot k$ e $L = \xi_{(\varphi)} \cdot k$ associadas aos mesmos campos de Killing — a diferença está apenas na condição de normalização.

1.5.1 Redução ao problema radial e o parâmetro de impacto

Impondo $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ no plano equatorial,

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (35)$$

e eliminando $\dot{t} = dt/d\lambda$ e $\dot{\varphi} = d\varphi/d\lambda$ em favor de E e L através de

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - r_s/r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}, \quad (36)$$

obtem-se, após multiplicar por $(1 - r_s/r)$,

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\frac{L^2}{r^2}. \quad (37)$$

Como apenas a razão entre E e L tem significado geométrico (a normalização de k^μ é arbitrária, ao contrário do caso massivo), define-se o *parâmetro de impacto* $b \equiv L/E$. Dividindo a equação radial por E^2 e usando $L^2/E^2 = b^2$, a equação se reescreve como

$$\frac{1}{E^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \quad (38)$$

de onde se identifica o *potencial efetivo para fótons*:

$$V_{\text{eff}}^\gamma(r) = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \quad (39)$$

de modo que a equação radial toma a forma compacta e familiar

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - V_{\text{eff}}^\gamma(r). \quad (40)$$

Note a ausência de qualquer termo puramente atrativo tipo $-1/r$ (o análogo do termo gravitacional newtoniano some, pois fótons não possuem massa de repouso); toda a estrutura do potencial vem do acoplamento entre o termo centrífugo L^2/r^2 e o fator de curvatura $(1 - r_s/r)$.

1.5.2 A esfera de fótons

O potencial $V_{\text{eff}}^\gamma(r)$ tem um único ponto extremo, um máximo, localizado em

$$r_{\text{ph}} = \frac{3GM}{c^2} = \frac{3}{2} r_s. \quad (41)$$

Nesse raio existe uma órbita circular de fótons — a *esfera de fótons* — porém instável: qualquer perturbação radial faz o fóton espiralar para o horizonte ou escapar para o infinito, exatamente como esperado de um máximo (e não mínimo) de potencial efetivo. Vale notar a hierarquia $r_s < r_{\text{ph}} < r_{\text{ISCO}} = 3r_s$: o horizonte de eventos, a esfera de fótons e a última órbita estável de partículas massivas ocorrem em três raios distintos, na ordem crescente esperada — fótons, sendo ultrarrelativísticos, conseguem orbitar estavelmente mais próximo do buraco negro do que qualquer partícula massiva, mas ainda assim não podem fazê-lo de forma estável.

1.5.3 Captura, espalhamento e o parâmetro de impacto crítico

O valor de V_{eff}^γ no máximo, avaliado em r_{ph} , define o *parâmetro de impacto crítico*:

$$b_c = \frac{3\sqrt{3}GM}{c^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_s. \quad (42)$$

Fótons vindos do infinito com $b < b_c$ ultrapassam a barreira de potencial e são inevitavelmente capturados pelo buraco negro; fótons com $b > b_c$ são espalhados, atingindo um raio mínimo (periastro) e retornando ao infinito. O valor b_c determina, portanto, o raio aparente da *sombra* (*shadow*) de um buraco negro tal como observada por um observador distante — o princípio físico por trás das imagens obtidas pelo Event Horizon Telescope dos buracos negros M87* e Sagittarius A*.

1.5.4 Deflexão gravitacional da luz

Para $b \gg r_s$ (trajetórias que passam longe do corpo central, como a luz de estrelas distantes ao passar perto do Sol), a trajetória é quase retilínea, sendo apenas ligeiramente deflectida pela curvatura do espaço-tempo. Integrando a equação radial e comparando a direção assintótica de chegada com a de saída, obtém-se, em primeira ordem em r_s/b , o *ângulo de deflexão*:

$$\Delta\varphi \approx \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2r_s}{b}. \quad (43)$$

Para um raio de luz rasante à borda do disco solar ($b \approx$ raio do Sol), essa fórmula prevê uma deflexão de aproximadamente 1,75 segundos de arco — o dobro do valor previsto por um cálculo newtoniano ingênuo em que a luz fosse tratada como uma partícula massiva viajando a c . Essa previsão foi confirmada pela expedição de Eddington ao eclipse solar de 1919, um dos episódios mais célebres da história da física e o evento que consagrou publicamente a Relatividade Geral.

Um efeito relacionado, também derivável da mesma métrica, é o *atraso de Shapiro*: um sinal eletromagnético que passa perto de um corpo massivo leva um tempo coordenado maior para percorrer uma dada distância do que levaria no espaço-tempo plano, devido à dilatação de g_{tt} próxima à massa — efeito hoje medido rotineiramente em radares planetários e em sistemas de posicionamento (GPS), onde correções relativísticas da ordem de dezenas de microssegundos por dia são essenciais para a precisão do sistema.

2 Conclusão

Ao longo deste relatório, percorremos o caminho completo que vai da imposição de uma simetria física — estaticidade e simetria esférica — até previsões concretas e testáveis sobre o comportamento de partículas e luz na vizinhança de corpos massivos. Esse percurso ilustra, de forma particularmente clara, a metodologia da Relatividade Geral: escrever o ansatz mais geral compatível com a simetria do problema, impor as equações de campo para fixar a geometria, identificar as isometrias remanescentes e traduzi-las em quantidades conservadas, e finalmente resolver as equações de movimento resultantes.

A solução exterior de Schwarzschild mostrou-se, ao mesmo tempo, extraordinariamente simples — depende de um único parâmetro, a massa M — e extraordinariamente rica: dela decorrem o raio de Schwarzschild e a noção de horizonte de eventos, a esfera de fótons, a última órbita estável (ISCO), a precessão de periélios e a deflexão gravitacional da luz. A solução interior, por sua vez, embora baseada em um modelo idealizado de densidade uniforme, revelou algo profundo e universal: o limite de Buchdahl, que estabelece um teto absoluto de compacidade, $2GM/(c^2 R) < 8/9$, para qualquer configuração estelar estática — um resultado que aponta, já em bases puramente matemáticas, para a inevitabilidade do colapso gravitacional quando esse limite é ultrapassado.

O papel central dos campos de Killing e das quantidades que eles conservam também ficou evidente: sem a energia específica e e o momento angular específico ℓ (ou seus análogos nulos E e L), o problema geodésico em Schwarzschild — um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares — seria praticamente intratável analiticamente. É a existência dessas simetrias que permite reduzir o movimento tanto de partículas massivas quanto de fótons a um único problema unidimensional efetivo, formalmente análogo ao de uma partícula clássica em um potencial, tornando transparente a origem física de fenômenos como órbitas capturadas, órbitas espalhadas e a sombra dos buracos negros.

Por fim, vale destacar que os resultados aqui derivados não são meros exercícios formais: a precessão do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz por eclipses solares, o atraso de Shapiro e, mais recentemente, a imagem direta da sombra de buracos negros supermassivos constituem uma sequência de confirmações experimentais que atravessa mais de um século, desde 1915 até os dias atuais, consolidando a métrica de Schwarzschild como um dos resultados mais bem testados — e mais fecundos — de toda a física teórica.

Referências

1. SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
2. WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984.
3. MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
4. WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: Wiley, 1972.
5. HARTLE, J. B. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2003.
6. CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2004.
7. BUCHDAHL, H. A. General Relativistic Fluid Spheres. *Physical Review*, v. 116, n. 4, p. 1027–1034, 1959.
8. SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, p. 189–196, 1916.
9. SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, p. 424–434, 1916.

Apêndice A — Revisão de Conceitos Básicos de Geometria Diferencial

Este apêndice reúne, de forma resumida, as ferramentas matemáticas de geometria diferencial empregadas ao longo do relatório, para referência rápida do leitor menos familiarizado com o formalismo tensorial da Relatividade Geral.

A.1 Métrica e elemento de linha

O objeto fundamental da RG é o *tensor métrico* $g_{\mu\nu}(x)$, um tensor simétrico de posto 2 que generaliza, para um espaço-tempo curvo, o produto escalar do espaço-tempo plano de Minkowski. Ele determina o *elemento de linha*, isto é, o intervalo infinitesimal entre dois eventos vizinhos separados por dx^μ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (44)$$

(soma implícita sobre índices repetidos, convenção de Einstein). O sinal de ds^2 classifica o tipo de intervalo: $ds^2 < 0$ corresponde a um intervalo *tipo-tempo* (na convenção de assinatura $(-, +, +, +)$ usada neste relatório), percorrido por partículas massivas; $ds^2 > 0$ a um intervalo *tipo-espaço*; e $ds^2 = 0$ a um intervalo *tipo-luz* (ou nulo), percorrido por fótons. O tempo próprio τ medido por um relógio qualquer é definido por $c^2 d\tau^2 = -ds^2$ ao longo de trajetórias tipo-tempo.

A.2 Símbolos de Christoffel e derivada covariante

Para diferenciar tensores de forma que o resultado ainda seja um tensor (a derivada parcial comum não o é, em coordenadas curvilíneas ou em espaços curvos), define-se a *derivada covariante* ∇ , construída a partir dos *símbolos de Christoffel*:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (45)$$

determinados inteiramente pela métrica e suas derivadas primeiras (conexão de Levi-Civita: livre de torção e compatível com a métrica, $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$). Para um vetor V^μ , por exemplo, $\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda$.

A.3 Geodésicas

Uma *geodésica* é a curva de “linha reta” generalizada de um espaço curvo: a trajetória que transporta paralelamente seu próprio vetor tangente, ou, equivalentemente, a trajetória de comprimento extremo (extremal) entre dois eventos. Partículas em queda livre — sujeitas apenas à gravidade — seguem geodésicas tipo-tempo (se massivas) ou nulas (se não massivas). A equação da geodésica é

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad (46)$$

com $\sigma = \tau$ (tempo próprio) para geodésicas tipo-tempo, ou um parâmetro afim λ qualquer para geodésicas nulas (para as quais $d\tau = 0$ identicamente e não pode ser usado como parâmetro).

A.4 Curvatura: tensores de Riemann, Ricci e escalar

A curvatura do espaço-tempo é codificada no *tensor de Riemann*, construído a partir dos símbolos de Christoffel e suas derivadas:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (47)$$

Contraindo dois de seus índices, obtém-se o *tensor de Ricci*, $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, e contraindo novamente com a métrica inversa, o *escalar de curvatura* (ou escalar de Ricci), $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Esses objetos, mais simples que o tensor de Riemann completo, são exatamente os que aparecem nas equações de campo de Einstein, através do *tensor de Einstein*, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, que satisfaz automaticamente a identidade de Bianchi contraída $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, garantindo a conservação local de energia-momento, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, como consequência da geometria.

A.5 Campos de Killing

Como discutido na Seção 1.3, um campo vetorial ξ^μ é um campo de Killing se satisfaz a equação de Killing $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu) = 0$, o que equivale a dizer que ξ gera um fluxo de isometrias (transformações que preservam todas as distâncias definidas por $g_{\mu\nu}$). Cada campo de Killing corresponde a uma quantidade conservada ao longo de geodésicas, $\xi_\mu u^\mu = \text{constante}$ — o análogo relativístico geral do teorema de Noether para simetrias de espaço-tempo. Espaços-tempos maximamente simétricos (como o de Minkowski) admitem dez campos de Killing independentes (quatro translações, três rotações e três *boosts*); o espaço-tempo de Schwarzschild, por ter apenas simetria esférica e estaticidade, admite quatro (Seção 1.3.2).

A.6 Equações de campo de Einstein

A dinâmica completa da RG está contida nas equações de campo, que relacionam a geometria (lado esquerdo) ao conteúdo de matéria e energia (lado direito):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (48)$$

Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, não lineares nas componentes de $g_{\mu\nu}$ (a não linearidade reflete o fato de que o próprio campo gravitacional carrega energia e, portanto, gravita). No vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$ e as equações reduzem-se a $R_{\mu\nu} = 0$ (a equação não se reduz a $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$: o tensor de Riemann pode — e em geral vai — ser não nulo mesmo no vácuo, permitindo curvatura e efeitos de maré na ausência local de matéria, como é o caso na região exterior de Schwarzschild).