

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TURMA GATOS INSTÁVEIS

Qubits e o Teletransporte Quântico

Escola de Talentos - Instituto Principia

Autora: Cecília Cristina Cavalcanti dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin

Julho de 2026

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à equipe de tutores e aos representantes da Escola de Talentos pela oportunidade concedida de participar deste projeto e pelo constante incentivo ao estudo e à investigação científica. O apoio oferecido por essa iniciativa foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho e para o aprofundamento em um tema tão instigante e enriquecedor.

Expresso também minha sincera gratidão ao meu tutor, Gustavo Rigolin, pela orientação dedicada ao longo deste projeto. Sua disposição em compartilhar conhecimentos, esclarecer dúvidas e direcionar os estudos foi essencial para que eu pudesse compreender de forma mais aprofundada a área abordada neste trabalho, além de contribuir significativamente para minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, ofereceram suporte, incentivo e encorajamento durante este percurso. Cada contribuição foi importante para tornar possível a realização deste projeto.

Qubits e o Teletransporte Quântico

por

Cecília Cristina Cavalcanti dos Santos

Resumo

Na primeira parte desta monografia, estudaremos, em nível introdutório, o formalismo matemático da mecânica quântica, concentrando nossa atenção nos sistemas quânticos mais simples: os sistemas de dois níveis, ou qubits. Utilizaremos a notação de Dirac para representar os vetores complexos que descrevem os estados quânticos, bem como para discutir operações básicas realizadas nesses sistemas. Além disso, serão analisadas algumas matrizes de transformação fundamentais, que descrevem as operações que podem ser aplicadas aos estados quânticos.

Na segunda parte da monografia, estudaremos o protocolo de teletransporte quântico, apresentando sua formulação tradicional e a sua implementação por meio de portas lógicas quânticas. Explicaremos, também, sua primeira realização experimental.

Sumário

1	Introdução Matemática	5
1.1	Definições	6
2	Os Postulados da Mecânica Quântica	16
2.1	Os postulados da mecânica quântica	16
2.2	Valor esperado	19
2.3	Qubits	20
2.4	A esfera de Bloch	21
2.5	Estados emaranhados	23
3	O protocolo de teletransporte	25
3.1	Introdução	25
3.2	O Protocolo de Teletransporte Quântico	26
3.2.1	Passo 1: Estado inicial	26
3.2.2	Reescrevendo o estado total inicial	27
3.2.3	Medida projetiva na base de Bell	28
3.2.4	Colapso e probabilidades	29
3.2.5	Comunicação clássica e correção	30
3.3	Teletransporte Quântico Utilizando Portas Lógicas	32
3.3.1	Introdução	32
3.3.2	Estado inicial	33
3.3.3	Aplicação da porta CNOT	34
3.3.4	Aplicação da porta Hadamard	35
3.3.5	Medição	37
3.3.6	Correções de Pauli	38
3.3.7	Circuito Quântico	39
3.3.8	Base de Bell	40
3.3.9	Probabilidades de Medição	40
3.3.10	Teorema da Não-Clonagem	41
3.3.11	Exemplos	41
3.3.12	Conclusão	43

4	Realização Experimental	45
4.1	Fótons e Operadores de Criação	46
4.1.1	Estados de Dois Fótons	46
4.1.2	Estados Bosônicos Idênticos	47
4.2	O Divisor de Feixe	48
4.2.1	Energia após o divisor de feixe	49
4.2.2	A fase extra devido à reflexão	50
4.2.3	Ação do BS sobre um fóton	50
4.3	Experimento de Hong-Ou-Mandel (<i>photon bunching</i>)	51
4.3.1	Comparação entre as descrições clássica e quântica	53
4.3.2	Fótons distinguíveis: comportamento clássico	54
4.4	Medidas de Bell utilizando o divisor de feixe	55
4.4.1	Caso 1: Ação do divisor de feixe sobre $ \Phi^+\rangle$	56
4.4.2	Caso 2: Ação do divisor de feixe sobre $ \Phi^-\rangle$	56
4.4.3	Caso 3: Ação do divisor de feixe sobre $ \Psi^+\rangle$	57
4.4.4	Caso 4: Ação do divisor de feixe sobre $ \Psi^-\rangle$	57
4.4.5	Interpretação Física e Medida de Bell Parcial	57
4.4.6	Estado Total Após o Beam Splitter	58
4.4.7	Probabilidades e Eficiência do Protocolo	58
4.5	Correções unitárias de Bob	59
4.5.1	Qubits fotônicos e as portas lógicas X e Z	60
4.5.2	Placas de meia onda e as portas X e Z	61
5	Conclusão	65

Capítulo 1

Introdução Matemática

Neste capítulo faremos uma apresentação preliminar de alguns elementos do arcabouço matemático que sustenta a mecânica quântica e que serão empregados no decorrer deste estudo. Nossa atenção estará voltada, principalmente, para os sistemas quânticos mais elementares, conhecidos como sistemas de dois níveis ou *qubits* (leia-se “kilbits”), peças centrais na teoria da informação quântica.

Os qubits podem ser implementados experimentalmente de diversas formas. Por exemplo, o spin de um elétron, que pode assumir dois valores (*up* ou *down*) é descrito por um qubit. O estado de polarização de um fóton (polarização horizontal ou vertical) também o é. Nas seções subsequentes elaboraremos um pouco mais sobre os aspectos físicos dos qubits. Por ora, nosso foco é apresentar sua representação matemática.

A descrição do estado de um sistema quântico se faz através de um vetor pertencente a um espaço vetorial complexo. Para representar tais estados, recorreremos à notação de Dirac. Assim, o estado mais geral de um sistema de dois níveis assume a forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

em que os coeficientes α e β são números complexos sujeitos à condição de normalização

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.2)$$

Aqui, $|z|$ denota o módulo do número complexo z .

Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ constituem uma base ortonormal do espaço de estados associado ao sistema. Na forma matricial, esses vetores podem ser expressos como

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

As operações sobre estados quânticos são representadas por meio de matrizes, denominadas operadores. As transformações mais importantes em sistemas de dois

níveis são descritas por matrizes unitárias (operadores unitários), cuja definição será dada mais à frente. Um exemplo de destaque é a matriz de Hadamard,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

cuja ação transforma os elementos da base computacional em superposições com probabilidades iguais. Operadores desse tipo são peças-chave na manipulação de qubits e voltarão a aparecer mais adiante, quando discutirmos o protocolo de teletransporte quântico.

Em linhas gerais, o formalismo matemático necessário para descrever os sistemas quânticos de dois níveis advém da álgebra linear. Conceitos como espaços vetoriais complexos, bases, operadores lineares e produtos tensoriais estarão presentes ao longo deste capítulo.

1.1 Definições

A mecânica quântica possui um elegante formalismo matemático, o qual permite descrever o comportamento microscópico de sistemas físicos com surpreendente precisão. Suas previsões nos levam a fenômenos que desafiam a intuição, como uma única partícula manifestando-se simultaneamente em vários locais distintos, ou duas partículas que permanecem correlacionadas de modo misterioso (emaranhadas), mesmo separadas por grandes distâncias.

Para investigar e descrever sistemas físicos, fazemos uso de um formalismo matemático. Assim como um pintor recorre a pincéis e tintas para dar vida a uma obra, compreender e manipular a mecânica quântica requer familiaridade com seus pincéis e tintas: a álgebra linear. Nas páginas seguintes, faremos uma revisão breve, porém fundamental, do aparato matemático necessário para o entendimento do protocolo de teletransporte quântico. Trataremos de noções básicas como vetores e espaços vetoriais, bases, independência linear e operadores, conceitos indispensáveis à construção da teoria quântica. Consultamos dois livros para elaborar este capítulo: *Principles of Quantum Mechanics* de R. Shankar [1] e *Principles of Quantum Computation and Information, Vol. 1* de G. Benenti *et al.* [2].

Ao longo deste trabalho, adotaremos a notação de Dirac, na qual estados quânticos são representados por meio de vetores linha $\langle w|$, chamados *bras*, ou por vetores coluna $|v\rangle$, denominados *kets*:

$$\langle w| = (w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n) \quad \text{e} \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Utilizaremos, também, uma notação compacta para representar os *kets*. Sendo

“ T ” a operação de transposição, podemos representar o ket $|v\rangle$ da seguinte forma,

$$|v\rangle = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^T. \quad (1.6)$$

Definição 1. Um espaço vetorial linear complexo V , de dimensão n , consiste em um conjunto de entidades chamadas vetores $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |v\rangle, |w\rangle$, fechado em relação às operações de soma e multiplicação por escalar, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$ (comutatividade da adição de vetores);
2. $|v\rangle + (|w\rangle + |z\rangle) = (|v\rangle + |w\rangle) + |z\rangle$ (associatividade da adição de vetores);
3. Existe um vetor nulo 0 tal que $|v\rangle + 0 = 0 + |v\rangle = |v\rangle$ (existência do vetor nulo);
4. Para cada vetor $|v\rangle$ existe um único vetor inverso tal que $|v\rangle + |-v\rangle = 0$ (existência do inverso);
5. $a(b|v\rangle) = ab|v\rangle$ (associatividade da multiplicação por escalar);
6. $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$ (distributividade da multiplicação por escalar);
7. $(a+b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$ (distributividade da multiplicação por escalar);
8. Para qualquer $|v\rangle \in V$, $|v\rangle \cdot 1 = 1 \cdot |v\rangle = |v\rangle$ (existe a unidade multiplicativa).

Nos itens acima, $a, b \in \mathbb{C}$, isto é, são números complexos, e $|v\rangle, |w\rangle, |z\rangle \in V$.

Exemplo 1. Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$. Um vetor arbitrário desse espaço pode ser escrito como

$$|\beta\rangle = b_1|\beta_1\rangle + b_2|\beta_2\rangle + b_3|\beta_3\rangle.$$

Os vetores $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle$ e $|\beta_3\rangle$ podem ser expressos em termos de suas componentes:

$$|\beta_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ou, de forma mais explícita:

$$|\beta\rangle = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Vale ressaltar que, em (1.5), os elementos $|v\rangle$ e $\langle w|$ pertencem a espaços vetoriais distintos. Existe um mapeamento (ou correspondência) linear entre kets e bras, pois a cada ket no espaço de estados associa-se um bra correspondente no espaço dual. De maneira mais específica, cada componente do vetor coluna possui um

correspondente no vetor linha, dado pelo seu complexo conjugado. O espaço dual, portanto, é constituído por mapas lineares que atuam sobre o espaço de estados.

Definição 2. Dizemos que um vetor $|v\rangle$ é combinação linear dos vetores $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$ quando existem escalares (números complexos) $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |i\rangle. \quad (1.7)$$

Definição 3. Um conjunto de vetores $|i\rangle$ é dito linearmente independente se, e somente se, a relação a seguir só for verdadeira quando todos os coeficientes a_i forem nulos:

$$\sum_{i=1}^n a_i |i\rangle = 0. \quad (1.8)$$

Ou seja, nenhum vetor do conjunto pode ser escrito como múltiplo de outro. Quando existe ao menos um coeficiente não nulo que torna a relação verdadeira, o conjunto é dito linearmente dependente. A noção de linearidade tem importância central na mecânica quântica. Os estados que descrevem sistemas físicos são vetores em um espaço vetorial complexo, e é justamente a linearidade que torna possível combiná-los para gerar novos estados, abrangendo todo o espaço de dimensão n .

Exemplo 2. Os vetores da base canônica em $\mathbb{R}^2$ (espaço real de dimensão dois),

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são linearmente independentes. De fato, para que a igualdade $a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 = 0$ seja satisfeita, é necessário que tanto a_1 quanto a_2 sejam iguais a zero.

Definição 4. O produto interno entre dois vetores $|v\rangle = (v_1, \dots, v_n)^T$ e $|w\rangle = (w_1, \dots, w_n)^T$ pertencentes ao espaço vetorial complexo V é o número complexo dado por

$$\langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i = c, \quad (1.9)$$

onde z^* representa o complexo conjugado do número z .

O produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\langle v|v\rangle \geq 0$ (igual a 0 somente se $|v\rangle = 0$);
2. $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$;
3. $\langle v|(a|w\rangle + b|z\rangle) = a\langle v|w\rangle + b\langle v|z\rangle$.

Como consequência de 1 e 2 acima, se $|\phi\rangle = a|w\rangle + b|z\rangle$ temos que $\langle \phi|v\rangle = a^* \langle w|v\rangle + b^* \langle z|v\rangle$. Em essência, o produto interno é uma extensão do conceito de produto escalar definido para espaços vetoriais reais. A diferença reside no fato de que, em vez de manipularmos vetores com componentes reais, trabalhamos agora com componentes complexas.

Exemplo 3. Considere os vetores

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad |w\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

O produto interno entre eles é dado por

$$\langle v|w\rangle = 2^* \cdot i + (1+i)^* \cdot 3 = 2i + (1-i) \cdot 3 = 2i + 3 - 3i = 3 - i.$$

Definição 5. A dimensão de um espaço vetorial corresponde ao número de vetores linearmente independentes capazes de gerar todo o espaço.

Definição 6. Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto formado por n vetores linearmente independentes que geram a totalidade do espaço vetorial. Qualquer vetor pertencente a V pode ser expresso, de forma única, como combinação linear dos vetores que compõem esse conjunto.

Na equação (1.7), os vetores $|i\rangle$ representam os elementos da base, e os escalares a_i são os coeficientes que multiplicam cada um desses elementos.

Definição 7. A norma de um vetor $|v\rangle = (v_1, \dots, v_n)$ é dada por:

$$\| |v\rangle \| = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}. \quad (1.10)$$

É possível normalizar qualquer vetor não nulo dividindo-o por sua norma. Esse vetor resultante, de norma igual a um, é chamado de vetor unitário e satisfaz a condição $\sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} = 1$. Na mecânica quântica, um vetor que satisfaz esta última condição é chamado de vetor normalizado.

O produto interno permite definir a noção de distância entre vetores e o ângulo entre eles dentro de um espaço vetorial complexo. Conclui-se, portanto, que o produto interno estabelece a métrica do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, conceito que abordaremos com mais detalhes a seguir.

Definição 8. Dois vetores $|v\rangle$ e $|w\rangle$ são considerados ortogonais quando seu produto interno é igual a zero:

$$\langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i = 0. \quad (1.11)$$

Exemplo 4. Os vetores $|v\rangle = (2, 3, -1)$ e $|w\rangle = (1, 0, 2)$ são ortogonais, uma vez que

$$\langle v|w\rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = 2 + 0 - 2 = 0.$$

Definição 9. Um conjunto de vetores $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$ é classificado como ortonormal quando

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}, \quad (1.12)$$

sendo $i, j = 1, 2, \dots, n$ e δ_{ij} a delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (1.13)$$

Dessa maneira, qualquer vetor pode ser decomposto em função dos vetores de uma base ortonormal por meio do produto interno:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|v\rangle = \sum_{i=1}^n |i\rangle v_i = \sum_{i=1}^n v_i |i\rangle. \quad (1.14)$$

Note que um cálculo direto utilizando qualquer base dá que $\sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i| = I$, onde I é a matriz identidade de dimensão n . A matriz identidade é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são todos um e os elementos fora da diagonal são nulos. Dessa forma, $I|v\rangle = |v\rangle$ ou, equivalentemente, $\sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|v\rangle = |v\rangle$.

Definição 10. Chamamos de espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ um espaço vetorial complexo, completo e dotado de um produto interno.

Se a grandeza física que queremos descrever for descrita por um número contável de possibilidades, como spin up ou down para um elétron, o espaço $\mathcal{H}$ é chamado de espaço discreto. Neste caso o número de coordenadas que caracteriza um vetor desse espaço é finito e podemos associar a ele uma base discreta que obedecerá às propriedades já apresentadas neste capítulo. Por outro lado, se a grandeza física sendo descrita pertencer a um espaço vetorial não-contável (posição e momento da partícula, por exemplo), $\mathcal{H}$ é chamado de espaço contínuo. Neste cenário, os vetores que o habitam são representados por funções contínuas de determinados parâmetros e este espaço vetorial tem dimensão infinita. Neste trabalho, restringiremos nossa análise aos espaços de Hilbert discretos, uma vez que o protocolo de teletransporte aqui estudado se passa em espaços vetoriais discretos.

Definição 11. Seja $|v\rangle$ um vetor de um espaço vetorial V de dimensão n . Um operador $\hat{A}$ corresponde a uma transformação aplicada a esse vetor $|v\rangle$, levando-o a outro vetor $|v'\rangle$, também pertencente a V :

$$\hat{A}|v\rangle = |v'\rangle. \quad (1.15)$$

Os operadores podem ser classificados em lineares ou não lineares. Para qualquer par de vetores $|v\rangle$ e $|w\rangle$ e qualquer número complexo α , os operadores lineares atendem às seguintes propriedades associativas e distributivas:

1. $\hat{A}|v\rangle = \hat{B}|v\rangle$ (se e somente se $\hat{A} = \hat{B}$);
2. $\hat{A}\alpha|v\rangle = \alpha\hat{A}|v\rangle$;
3. $(\hat{A} + \hat{B})|v\rangle = \hat{A}|v\rangle + \hat{B}|v\rangle$;
4. $\hat{A}(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle) = \alpha\hat{A}|v\rangle + \beta\hat{A}|w\rangle$.

Aplicando a equação (1.7):

$$\hat{A}|v\rangle = \sum_{i=1}^n \hat{A}a_i|i\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\hat{A}|i\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|i'\rangle. \quad (1.16)$$

Mais uma vez, fica evidente a importância da linearidade. Conhecendo-se a ação do operador sobre os elementos da base, torna-se possível determinar como ele atua sobre qualquer vetor do espaço vetorial em consideração.

Definição 12. O operador identidade é aquele que, ao ser aplicado a qualquer vetor, devolve o próprio vetor:

$$I|v\rangle = |v\rangle. \quad (1.17)$$

Definição 13. O operador nulo é caracterizado por satisfazer

$$0|v\rangle = 0. \quad (1.18)$$

Definição 14. O operador inverso de um dado operador $\hat{A}$, quando existe, satisfaz

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = I. \quad (1.19)$$

A existência do inverso de um operador é garantida se, e somente se, a equação

$$\hat{A}|v\rangle = 0 \quad (1.20)$$

é satisfeita apenas se $|v\rangle$ for o vetor nulo. Além disso, A tem um inverso se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, onde $\det(A)$ representa o determinante da matriz A . De forma direta, observa-se que

$$(\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}. \quad (1.21)$$

Já o inverso do produto entre dois operadores é dado por:

$$(\hat{A}\hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}. \quad (1.22)$$

Definição 15. Um operador U é classificado como unitário quando

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I. \quad (1.23)$$

Em outras palavras, um operador é unitário se, e somente se,

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad (1.24)$$

com $U^\dagger$ também unitário. Note que $U^\dagger = (U^T)^*$, isto é, a operação conhecida como “U adaga” (obtenção do operador adjunto) consiste na transposição da matriz U seguida pela conjugação complexa de todos os seus elementos. Podemos inverter a ordem destas operações sem alterar o resultado final: $(U^T)^* = (U^*)^T$.

Uma característica notável dos operadores unitários é a preservação do produto interno. Quando atuam sobre dois vetores $|v\rangle$ e $|w\rangle$, de modo que possamos definir $|u\rangle = U|v\rangle$ e $|z\rangle = U|w\rangle$, obtemos:

$$\langle u|z\rangle = (\langle v|U^\dagger)(U|w\rangle) = \langle v|U^\dagger U|w\rangle = \langle v|w\rangle. \quad (1.25)$$

No caso particular em que $|v\rangle = |w\rangle$, percebe-se que o operador unitário também conserva a norma do vetor.

Definição 16. Diz-se que o operador $\hat{A}^\dagger$ é o adjunto de $\hat{A}$ quando:

$$\langle v | (\hat{A}|w\rangle) = (\langle v|\hat{A}^\dagger) |w\rangle. \quad (1.26)$$

Definição 17. Um operador é dito Hermitiano quando $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, e anti-Hermitiano quando $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$. Os autovalores associados a operadores Hermitianos são sempre números reais.

A operação de tomar o adjunto de um operador equivale, de modo análogo, a tomar o complexo conjugado de um número. Como $\alpha|v\rangle = |\alpha v\rangle$ e $\langle \alpha v| = \langle v|\alpha^*$, temos:

$$\hat{A}|v\rangle = |\hat{A}v\rangle \quad \text{e} \quad \langle \hat{A}v| = \langle v|\hat{A}^\dagger. \quad (1.27)$$

Definição 18. O comutador entre dois operadores é definido pela relação

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.28)$$

Exemplo 5. Um exemplo amplamente conhecido envolve a não-comutatividade entre as componentes do momento angular orbital ou de spin. Para o momento angular de spin do elétron, temos,

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k, \quad (1.29)$$

onde i é a unidade imaginária, $\hat{\sigma}_i$ são as matrizes de Pauli discutidas nos capítulos seguintes, $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$ e $\epsilon_{ijk} = 0$ se um ou mais índices são iguais.

Pode-se mostrar que a não-comutatividade entre estes operadores implica a impossibilidade de se conhecer simultaneamente, com precisão absoluta, mais de uma componente do momento angular íntinseco (spin) do elétron. Podemos saber qual o spin do elétron ao medirmos este spin na direção z (direção 3) mas não seu valor simultaneamente nas direções x e y (direções 1 e 2). Esse comportamento ilustra mais uma das peculiaridades da mecânica quântica, onde grandezas que classicamente seriam mensuráveis em conjunto se tornam, no contexto quântico, incompatíveis entre si devido à natureza fundamental dos operadores envolvidos.

Quando dois operadores comutam entre si, o comutador associado é nulo e, portanto

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}. \quad (1.30)$$

Além do comutador, há também o anti-comutador, definido por:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (1.31)$$

Definição 19. Um operador linear $\hat{A}$ que atua sobre um espaço vetorial de dimensão n pode ser representado, em uma certa base, por uma coleção de n^2 números, conhecidos como elementos de matriz A_{ij} .

A equação (1.16) mostrou que, ao aplicar um operador a um vetor pertencente a um espaço vetorial complexo, sua ação se estende também à toda a base na qual esse vetor é expandido. Assim, conhecendo-se o resultado da ação do operador sobre os vetores da base, torna-se possível prever a transformação ocorrida em qualquer estado:

$$\hat{A}|v\rangle = \hat{A} \sum_i a_i |i\rangle = \sum_i a_i \hat{A}|i\rangle = \sum_i a_i |i'\rangle. \quad (1.32)$$

Se a aplicação de $\hat{A}$ em $|v\rangle$ resulta em

$$\hat{A}|v\rangle = |v'\rangle, \quad (1.33)$$

então as componentes do ket $|v'\rangle$ podem ser obtidas em função de A_{ij} e das componentes de $|v\rangle$:

$$a'_i = \langle i|v'\rangle = \langle i|\hat{A}|v\rangle = \langle i|\hat{A} \left(\sum_j a_j |j\rangle \right) = \sum_j a_j \langle i|\hat{A}|j\rangle = \sum_j A_{ij} a_j. \quad (1.34)$$

Observe que $\hat{A}|v\rangle$ retorna um novo vetor e $\langle i|\hat{A}|j\rangle$ corresponde ao elemento de matriz A_{ij} de $\hat{A}$.

Podemos reescrever a equação (1.34) em sua forma matricial, na qual a coluna n representa o n -ésimo vetor da base, já transformado pela ação do operador:

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{A}|1\rangle & \langle 1|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle 1|\hat{A}|n\rangle \\ \langle 2|\hat{A}|1\rangle & \langle 2|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle 2|\hat{A}|n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle n|\hat{A}|1\rangle & \langle n|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle n|\hat{A}|n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Um operador também admite representação por meio do produto externo entre dois kets. A ordem em que esses objetos aparecem na notação de Dirac é crucial: o termo $\langle v|w\rangle$ resulta em um número complexo, enquanto $|v\rangle\langle w|$ produz uma matriz. Logo, é possível escrever operadores na forma matricial, em que cada elemento é determinado por (1.35).

Exemplo 6. Tomando novamente os vetores do Exemplo 3, o produto externo entre $|v\rangle$ e $|w\rangle$ resulta em

$$|v\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 6 \\ (1+i)(-i) & 3(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 6 \\ 1-i & 3+3i \end{pmatrix}.$$

Exemplo 7. O operador identidade pode ser representado em função de seus elementos de matriz:

$$I_{ij} = \langle i|I|j\rangle = \langle i|j\rangle = \delta_{ij}. \quad (1.36)$$

De forma explícita,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Definição 20. A relação de completeza expressa a decomposição da matriz identidade como uma soma sobre um conjunto completo de projetores:

$$I = \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_i P_i. \quad (1.38)$$

O termo $P_i = |i\rangle\langle i|$ é denominado operador projeção associado ao ket $|i\rangle$. Quando esse operador atua sobre um vetor arbitrário $|v\rangle$, o resultado é um vetor proporcional ao vetor da base considerado, com coeficiente v_i que indica a parcela de $|v\rangle$ projetada na direção de $|i\rangle$:

$$P_i|v\rangle = |i\rangle\langle i|v\rangle = |i\rangle v_i. \quad (1.39)$$

A soma de todas essas projeções, em todas as direções da base, recupera o próprio vetor original. Nota-se facilmente que $P_i^2 = P_i$.

Os projetores associados aos vetores de uma base satisfazem ainda a seguinte relação:

$$P_i P_j = |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j| = \delta_{ij} P_j. \quad (1.40)$$

Definição 21. Um autovetor de um operador linear $\hat{A}$ é definido como um vetor $|v\rangle$ não nulo tal que

$$\hat{A}|v\rangle = \alpha|v\rangle, \quad (1.41)$$

em que α é um número complexo chamado autovalor de $\hat{A}$ associado ao autovetor $|v\rangle$. A equação (1.41) é conhecida como equação do autovalor.

Utilizando as equações (1.7), (1.16) e (1.41), pode-se mostrar que a solução da equação (1.41) é obtida a partir da equação característica:

$$\det(\hat{A} - \alpha I) = 0. \quad (1.42)$$

Convém destacar que, embora a equação (1.42) seja calculada em uma base específica, os autovalores resultantes (raízes do polinômio característico) não dependem da escolha dessa base. Em outras palavras, a equação (1.42) é determinada exclusivamente pelo operador $\hat{A}$, sem qualquer relação com a representação matricial empregada.

Exemplo 8. Considere o operador $\hat{A}$ dado por

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Podemos calcular seus autovalores e autovetores usando a equação (1.42):

$$\det(\hat{A} - \alpha I) = \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = (2 - \alpha)^2 - 1 = 0. \quad (1.44)$$

Resolvendo, encontramos $(2 - \alpha)^2 = 1$, ou seja, $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$. Resolvendo a equação

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

obtemos que $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é o autovetor correspondente a $\alpha_1 = 3$ enquanto o autovetor associado a $\alpha_2 = 1$ é $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Definição 22. Para todo operador Hermitiano $\hat{A}$, existe pelo menos uma base formada por seus autovetores ortonormais. Nesta base, $\hat{A}$ é diagonal, com seus autovalores ocupando as entradas da diagonal principal.

Definição 23. As matrizes de Pauli σ_x, σ_y e σ_z (ou σ_1, σ_2 e σ_3) são dadas por

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Muitas vezes estas matrizes são representadas, respectivamente, pelas letras X, Y e Z .

Capítulo 2

Os Postulados da Mecânica Quântica

Neste capítulo, faremos uma revisão dos postulados que servem de alicerce para a mecânica quântica, tomando como referência os seguintes dois livros para elaborar este capítulo: *Principles of Quantum Mechanics* de R. Shankar [1] e *Principles of Quantum Computation and Information, Vol. 1* de G. Benenti *et al.* [2]. Discutiremos brevemente o significado destes postulados e as implicações de cada um deles. Em seguida, retomaremos nossos estudos sobre os qubits e discutiremos os estados quânticos emaranhados, os quais se mostrarão bastante úteis na descrição matemática do protocolo de teletransporte.

2.1 Os postulados da mecânica quântica

Postulado 1. A todo sistema físico isolado associa-se um espaço vetorial complexo munido de produto interno (o espaço de Hilbert), o qual é denominado *espaço de estados* do sistema. A descrição completa do sistema é feita por seu *vetor de estado* (ou *função de onda*), um vetor unitário pertencente a esse espaço de Hilbert.

Exemplo 1. O sistema quântico mais elementar com o qual podemos lidar é o de dois níveis. O espaço de estados desse sistema possui dimensão $n = 2$. Admita que $|0\rangle$ e $|1\rangle$ constituem uma base ortonormal desse espaço. Sendo assim, qualquer vetor desse espaço vetorial pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base,

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (2.1)$$

onde a e b são números complexos. Como $|\psi\rangle$ é um vetor unitário, deve-se ter $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

De maneira intuitiva, os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ se assemelham aos valores 0 e 1 assumidos por um bit clássico. Contudo, a comparação não pode ir muito longe, já que o qubit corresponde, na verdade, a uma superposição desses dois estados.

Não se pode afirmar que o qubit se encontra de forma definitiva no estado $|0\rangle$ ou no estado $|1\rangle$ antes que uma medida seja realizada sobre o sistema. Mais adiante, exploraremos os qubits com maior profundidade.

Postulado 2. A evolução de um sistema quântico isolado é descrita por uma *transformação unitária*. Em outras palavras, o estado $|\psi\rangle$ do sistema em um dado instante t_1 relaciona-se com o estado $|\psi'\rangle$ no instante t_2 por meio de um operador unitário U que depende somente dos tempos t_1 e t_2 :

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle. \quad (2.2)$$

O termo “isolado” aqui significa que o sistema não interage de forma alguma com outros sistemas. É evidente que, em sentido estrito, um sistema totalmente isolado não existe (a menos que se considere o Universo como um todo), uma vez que mesmo o sistema mais isolado tende a interagir, ainda que minimamente, com sistemas vizinhos. Apesar disso, há sistemas que podem ser aproximados, com boa precisão, como se estivessem isolados. No caso particular dos sistemas de dois níveis, qualquer sistema cujos dois níveis estejam suficientemente afastados dos demais pode ser tratado, de forma aproximada, como um sistema de dois níveis isolado.

As matrizes de Pauli são exemplos de operadores que representam transformações unitárias aplicáveis a qubits. Na linguagem da computação quântica, os operadores σ_x , σ_y e σ_z de Pauli correspondem, respectivamente, às portas lógicas X, Y e Z. A porta X atua trocando $|0\rangle$ por $|1\rangle$ e $|1\rangle$ por $|0\rangle$:

$$\sigma_x |\psi\rangle = \sigma_x (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle. \quad (2.3)$$

Já a porta Z preserva $|0\rangle$ sem alterações e introduz uma inversão de fase em $|1\rangle$:

$$\sigma_z |\psi\rangle = \sigma_z (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha |0\rangle - \beta |1\rangle. \quad (2.4)$$

Por sua vez, a porta Y acrescenta uma fase i e permuta os valores associados a $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ao mesmo tempo em que inverte o sinal de $|1\rangle$:

$$\sigma_y |\psi\rangle = \sigma_y (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = i\alpha |1\rangle - i\beta |0\rangle. \quad (2.5)$$

O segundo postulado descreve a relação entre dois estados quânticos de um sistema isolado, separados por dois instantes de tempo distintos. Podemos refinar a definição desse postulado de modo a englobar também a evolução do sistema em um *tempo contínuo*.

Postulado 2'. A evolução temporal do estado de um sistema isolado é regida pela *Equação de Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle, \quad (2.6)$$

sendo $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π e H a hamiltoniana do sistema, que corresponde a um operador hermitiano.

Uma das consequências diretas da Equação de Schrödinger é a reversibilidade da evolução temporal do sistema. Tal evolução, em um sistema quântico isolado, é *reversível*, contanto que nenhuma informação seja extraída sobre o estado do sistema. Em outras palavras, essa reversibilidade significa que, conhecendo-se o estado final e a forma como a evolução ocorreu, é possível determinar o estado inicial do sistema.

Por ser hermitiano, H admite a decomposição espectral

$$H = \sum_E E |E\rangle \langle E|, \quad (2.7)$$

com autovalores E e autovetores unitários correspondentes $|E\rangle$. Os estados $|E\rangle$ recebem o nome de *autoestados de energia* ou *estados estacionários*. A menor energia que o sistema pode assumir é chamada de *energia do estado fundamental* do sistema, e o autoestado de energia correspondente é denominado *estado fundamental*.

Postulado 3. As medidas quânticas são descritas por uma coleção $\{M_m\}$ de *operadores de medida*, que atuam sobre o espaço de estados do sistema submetido à medição. O índice m representa os possíveis resultados que o experimento pode fornecer. Se imediatamente antes da medida o sistema estiver no estado $|\psi\rangle$, a probabilidade de se obter o resultado m é

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (2.8)$$

e o estado em que o sistema fica imediatamente após a medida é

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}. \quad (2.9)$$

Os operadores de medida obedecem à relação de completeza

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \quad (2.10)$$

o que, combinado com (2.8), garante que a soma de todas as probabilidades é igual a 1:

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_m M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (2.11)$$

Exemplo 2. Vamos realizar uma medida sobre um qubit utilizando a base computacional. Existem dois resultados possíveis, descritos pelos operadores de medida $M_0 = |0\rangle \langle 0|$ e $M_1 = |1\rangle \langle 1|$. Ambos são hermitianos, e além disso $M_0^2 = M_0$, $M_1^2 = M_1$. Portanto, a relação de completeza é satisfeita:

$$I = M_0 M_0^\dagger + M_1 M_1^\dagger = M_0 + M_1. \quad (2.12)$$

Suponhamos agora o estado

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle.$$

Então, a probabilidade de obter como resultado da medida o valor 0 é

$$p(0) = \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle = \langle\psi|M_0|\psi\rangle = |a|^2.$$

Analogamente, a probabilidade de obter o valor 1 é $p(1) = |b|^2$. O estado do sistema após a medida, em cada um dos casos, será

$$\begin{aligned} \frac{M_0|\psi\rangle}{|a|} &= \frac{a}{|a|}|0\rangle, \\ \frac{M_1|\psi\rangle}{|b|} &= \frac{b}{|b|}|1\rangle. \end{aligned}$$

Como os coeficientes $\frac{a}{|a|}$ e $\frac{b}{|b|}$ possuem módulo igual a um, podemos descartá-los e considerar os estados pós-medida simplesmente como $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Em outras palavras, fases globais são irrelevantes para caracterizar um estado físico. Tanto $e^{i\theta}|\psi\rangle$ quanto $|\psi\rangle$ representam o mesmo estado.

Postulado 4. O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos subsistemas que o constituem. Além disso, considerando sistemas numerados de 1 até n , e supondo que o sistema i tenha sido preparado no estado $|\psi_i\rangle$, então o estado conjunto do sistema completo é dado por $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.

2.2 Valor esperado

Imaginemos um conjunto de estados $|\psi\rangle$ preparados de forma idêntica, constituindo o que chamamos de ensemble. Considere agora um operador $\hat{A}$ associado a uma grandeza física que queremos medir. Chamamos este operador de *observável* do sistema. O postulado da medida diz que **ao efetuarmos a medida de $\hat{A}$, qualquer um dos seus autovalores pode ser o resultado obtido**. Realizando essa medição em cada cópia do sistema, obtemos uma distribuição de probabilidades, em que cada autovalor λ_n está vinculado a uma probabilidade $P(\lambda_n) = |c_n|^2$. Como já discutimos na seção anterior, em geral não conhecemos o resultado exato antes da medida, apenas sendo possível obter a probabilidade de ocorrência de cada resultado. Define-se então o *valor esperado* de um observável como a média das medidas sucessivas realizadas sobre um ensemble de partículas preparadas identicamente:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n \lambda_n P(\lambda_n) = \sum_n \lambda_n |\langle u_n | \psi \rangle|^2, \quad (2.13)$$

sendo $|u_n\rangle$ o autovetor associado ao autovalor λ_n .

De forma alternativa, podemos utilizar a relação de completeza:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle &= \langle \psi | \mathbf{1} \hat{A} \mathbf{1} | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left(\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| \right) \hat{A} \left(\sum_m |u_m\rangle \langle u_m| \right) | \psi \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle \psi | u_n \rangle \langle u_n | \hat{A} | u_m \rangle \langle u_m | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Recorrendo à equação do autovalor:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \langle \psi | u_n \rangle \langle u_n | \hat{A} | u_m \rangle \langle u_m | \psi \rangle &= \sum_{n,m} \lambda_n \langle \psi | u_n \rangle \langle u_n | u_m \rangle \langle u_m | \psi \rangle \\ &= \sum_n \lambda_n |\langle u_n | \psi \rangle|^2 \\ &= \langle \hat{A} \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3 Qubits

O bit clássico é a unidade fundamental de informação nos sistemas computacionais, podendo assumir os valores binários 0 e 1. Em contrapartida, o *qubit* é a unidade básica da informação quântica e pode ser realizado em qualquer sistema de dois níveis, como o spin do elétron, a polarização de um fóton ou um átomo de dois níveis com um estado fundamental e um estado excitado. Esse sistema de dois níveis é descrito por um espaço de Hilbert complexo com duas dimensões. Para construir um qubit, basta escolher um par qualquer de vetores normalizados e mutuamente ortogonais nesse espaço. Em geral, recorre-se à *base computacional*:

$$|0\rangle \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Conforme discutido, qualquer estado contido nesse espaço pode ser representado como combinação linear dos vetores da base:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.17)$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Já que esse estado deve ser normalizado, é necessário que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Vale notar que fases globais não carregam significado físico, pois não influenciam as propriedades observáveis do sistema. Sendo assim, os estados $|\psi\rangle$ e $e^{i\phi}|\psi\rangle$ levam aos mesmos resultados experimentais após uma medida. Por essa razão, é

conveniente fatorar essa fase global. De modo particular, é vantajoso escolher a fase global de modo a tornar o coeficiente de $|0\rangle$ real e não negativo (com exceção do caso em que o estado é o próprio elemento da base $|1\rangle$, onde $\alpha = 0$). Combinando esse fato com a condição de normalização, é mais conveniente trabalhar não com α e β diretamente, mas com $\alpha = \cos(\theta/2)$ e $\beta = e^{i\phi} \sin(\theta/2)$ para representar o estado genérico de um qubit:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

sendo $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. O intervalo permitido para θ e a presença do fator $1/2$ asseguram que o qubit seja representado de modo único. Poderíamos pensar em deixar θ variar de 0 a 2π e usar o ângulo inteiro, porém essa escolha não garantiria uma caracterização única do qubit em termos dos parâmetros θ e ϕ .

Sob essa nova parametrização, há infinitos estados possíveis para o sistema. Apesar disso, um qubit não armazena uma quantidade infinita de informação. Na prática, para especificar os números complexos α e β seria necessário dispor de um ensemble de estados identicamente preparados e realizar medidas sobre um número arbitrariamente grande deles, de modo a obter, em média, os valores de α e β . A cada medida feita sobre o sistema, extrai-se apenas um único bit de informação: o autovalor relativo ao autoestado para o qual o sistema colapsa ($\sigma_n = +1$ ou $\sigma_n = -1$, no caso de uma medida do qubit feita ao longo de um eixo $\mathbf{n}$ arbitrário).

Ou seja, na prática, um sistema de dois níveis pode ser empregado como qubit desde que possa ser manipulado das seguintes formas:

1. Pode ser preparado em um estado bem definido (por exemplo, o estado $|0\rangle$).
2. Qualquer estado do qubit pode ser convertido em qualquer outro por meio de transformações unitárias.
3. O estado do qubit pode ser medido na base computacional. Em outras palavras, é possível medir a polarização do qubit ao longo do eixo z .

O operador hermitiano associado a essa medida é a matriz de Pauli σ_z , cujos autoestados são justamente os kets $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Assim, se o qubit estiver no estado dado em (2.18), poderemos obter como resultado da medida os autovalores $\sigma_z = +1$ ou $\sigma_z = -1$, com probabilidades

$$p_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad p_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2. \quad (2.19)$$

2.4 A esfera de Bloch

A utilidade da parametrização introduzida na equação (2.18) reside na possibilidade de mapearmos todos os estados do qubit sobre a superfície de uma esfera

unitária. Em outras palavras, podemos interpretar ϕ como o ângulo azimutal e θ como o ângulo polar em coordenadas esféricas. Essa representação geométrica do qubit é conhecida como *esfera de Bloch*. A condição de normalização permite associar a cada estado do qubit um ponto sobre essa esfera. O vetor de Bloch é, portanto, um vetor cujas componentes (x, y, z) satisfazem a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Essas coordenadas (x, y, z) da esfera de Bloch são, a menos de uma fase global, observáveis (veja Fig. 2.1).

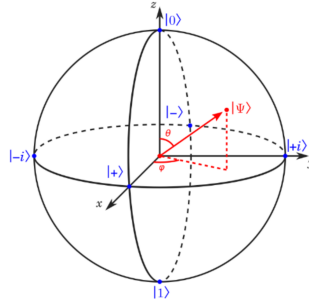


Figura 2.1: A representação da esfera de Bloch de um qubit. Um qubit pode ser completamente determinado pelos ângulos θ e ϕ , nos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. Um qubit arbitrário pode ser escrito em termos desses ângulos como $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$.

Quando aplicamos as matrizes de Pauli, escritas na base computacional, ao estado dado em (2.18), obtemos

$$\sigma_x |\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |1\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |0\rangle, \quad (2.20)$$

$$\sigma_y |\psi\rangle = i \cos\frac{\theta}{2} |1\rangle - i e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |0\rangle, \quad (2.21)$$

$$\sigma_z |\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle - e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (2.22)$$

Os valores esperados de σ_x , σ_y e σ_z podem ser obtidos aplicando $\langle\psi|$ às Equações (2.20) – (2.22):

$$\langle\psi| \sigma_x |\psi\rangle = \langle\psi| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} |\psi\rangle = \sin\theta \cos\phi = x, \quad (2.23)$$

$$\langle\psi| \sigma_y |\psi\rangle = \langle\psi| \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} |\psi\rangle = \sin\theta \sin\phi = y, \quad (2.24)$$

$$\langle\psi| \sigma_z |\psi\rangle = \langle\psi| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} |\psi\rangle = \cos\theta = z. \quad (2.25)$$

Ao medirmos σ_z , encontramos as coordenadas (x, y, z) . De fato, fazendo uso da Equação (2.19), temos

$$p_0 - p_1 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = \cos \theta = z. \quad (2.26)$$

Se dispomos de um número N suficientemente grande de sistemas preparados identicamente no mesmo estado (descrito pela Eq. (2.18)), é possível estimar z como $N_0/N - N_1/N$, em que N_0 representa a quantidade de medidas com resultado $|0\rangle$ (autovalor $+1$) e N_1 a quantidade de medidas com resultado $|1\rangle$ (autovalor -1). A conclusão é que a precisão da medida de z pode ser tornada tão alta quanto se queira, bastando que o número de medições realizadas seja suficientemente elevado. Por outro lado, para obter as coordenadas x e y , é necessário aplicar previamente transformações unitárias ao sistema. Ao agirmos com a transformação unitária

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

sobre o estado dado em (2.18), obtemos o novo estado $|\psi^{(1)}\rangle = U_1 |\psi\rangle$. Projetando esse estado na base computacional, obtemos como resultado -1 ou 1 , com probabilidades $p_0^{(1)} = |\langle 0 | \psi^{(1)} \rangle|^2$ e $p_1^{(1)} = |\langle 1 | \psi^{(1)} \rangle|^2$, respectivamente. Logo,

$$p_0^{(1)} - p_1^{(1)} = \cos \phi \sin \theta = x. \quad (2.28)$$

De forma análoga, se o estado for transformado pela matriz

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

obtemos $|\psi^{(2)}\rangle = U_2 |\psi\rangle$. Dessa forma,

$$p_0^{(2)} - p_1^{(2)} = \sin \phi \sin \theta = y. \quad (2.30)$$

sendo $p_0^{(2)} = |\langle 0 | \psi^{(2)} \rangle|^2$ e $p_1^{(2)} = |\langle 1 | \psi^{(2)} \rangle|^2$ as probabilidades de obter, respectivamente, os autovalores $+1$ ou -1 (kets $|0\rangle$ ou $|1\rangle$) quando medimos, por exemplo, o spin de um elétron ao longo do eixo z .

Na Figura 2.1, os estados da base computacional correspondem aos autovetores do operador Z e ocupam os polos norte e sul da esfera de Bloch. Os estados da base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, por sua vez, são autovetores do operador X e, juntamente com os estados $\{|+i\rangle, |-i\rangle\}$, que são os autovetores de Y , estão localizados em pontos opostos no equador da esfera de Bloch.

2.5 Estados emaranhados

No Capítulo 1, vimos que estados compostos são descritos por meio do produto tensorial. Considere dois qubits cujos estados locais sejam $|\psi\rangle_A = |0\rangle$ e $|\psi\rangle_B = |0\rangle$.

O estado global do sistema, isto é, o estado conjunto dos dois qubits, é dado pelo produto tensorial entre os estados locais:

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle. \quad (2.31)$$

De maneira semelhante, se tivermos $|\psi\rangle_A = |0\rangle$ e $|\psi\rangle_B = |+\rangle$, sendo $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, então o estado global resultante será

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = |0\rangle \otimes |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle). \quad (2.32)$$

Dessa forma, obtemos o estado global a partir dos estados locais dos qubits. Mas será que o caminho inverso também é possível? Em outras palavras, dado um estado global, somos sempre capazes de recuperar os estados locais individuais de cada qubit? Vejamos.

Podemos escrever os estados locais $|\psi\rangle_A$ e $|\psi\rangle_B$, bem como o estado global $|\psi\rangle_{AB}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_A &= a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \\ |\psi\rangle_B &= b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle, \\ |\psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo a_0, a_1, b_0, b_1 as amplitudes de probabilidade correspondentes a cada estado. O produto tensorial entre os estados locais resulta em:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B &= (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle) \otimes (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle) \\ &= a_0 b_0 |00\rangle + a_0 b_1 |01\rangle + a_1 b_0 |10\rangle + a_1 b_1 |11\rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comparando a Equação (2.34) com (2.33), constatamos que

$$a_0 b_0 = a_1 b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.35)$$

$$a_0 b_1 = a_1 b_0 = 0. \quad (2.36)$$

Isto é, devemos ter $a_0 = 0$ ou $b_1 = 0$. Entretanto, a Equação (2.35) indica que nem a_0 nem b_1 podem ser nulos. Essa contradição revela uma propriedade exclusiva desse estado: o emaranhamento. Em suma, o estado $|\psi\rangle_{AB}$ não pode ser fatorado como produto de dois estados locais. Estados deste tipo são chamados de estados quânticos emaranhados ou simplesmente estados emaranhados. Este estado será o recurso quântico fundamental para a execução do teletransporte quântico conforme veremos a seguir.

Capítulo 3

O protocolo de teletransporte

3.1 Introdução

A informação quântica estuda o processamento e a transmissão de informação em sistemas quânticos. O estudo da informação quântica como uma disciplina coe-rente começou a emergir de fato na década de 1980 e floresceu na década de 1990. Neste período, surgiram os primeiros protocolos de informação quântica, como o protocolo de criptografia quântica BB84 [3], e os primeiros algoritmos, como os algoritmos de Deutsch-Jozsa [4] e o da fatoração de números primos de Shor [5]. Em 1992, Bennett e Wiesner apresentaram um protocolo inovador de comunicação, conhecido como codificação superdensa [6]. Este protocolo requer pares emaranhados para a sua execução, os quais também são chamados de pares EPR em homenagem ao célebre artigo de Einstein, Podolsky e Rosen sobre estados emaranhados. Esse protocolo viabilizava a transmissão de dois bits clássicos através do envio de um qubit. Pouco tempo depois, em 1993, Bennett *et al.* [7] fizeram uma descoberta ainda mais surpreendente: o protocolo de teletransporte quântico. Este protocolo possibilita a transferência de estados quânticos de um local a outro sem a necessidade de um meio contínuo entre o emissor e o receptor. A função de onda que descreve um sistema físico em A passa a descrever um outro sistema físico em B. Este “teletransporte” da função de onda só é possível se A e B compartilham um estado emaranhado.

Apesar de parecer, esta ideia não se alinha com o teletransporte frequentemente retratado na ficção científica, onde objetos ou pessoas são instantaneamente transportados de um lugar para outro. O teletransporte quântico não envolve o transporte real de matéria. Em vez disso, envolve a transferência do estado de uma partícula para outra “consumindo” emaranhamento quântico. É necessário salientar que o receptor só terá acesso completo ao estado teleportado após receber determinada informação do emissor via um canal clássico de comunicação (nenhum sinal viaja mais rápido do que a luz). Como veremos mais adiante, sem essa informação, o estado recebido não será uma reprodução exata do estado teleportado. De forma mais simples, Bob (nosso receptor) não pode afirmar nada sobre o estado recebido sem

essa informação vinda do emissor. Com isso garantimos que nenhuma informação é transmitida mais rápido do que a luz e temos os princípios da relatividade restrita satisfeitos. O teletransporte quântico também não produz cópias: ao transmitir a informação quântica de um lugar a outro, o estado original é destruído ao cabo do protocolo.

3.2 O Protocolo de Teletransporte Quântico

3.2.1 Passo 1: Estado inicial

Considere que Alice possui um qubit em um estado quântico arbitrário:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle, \quad (3.1)$$

com $a, b, \phi \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$. A fase ϕ , conhecida por fase relativa, tem implicações experimentais e pode ser medida. Por outro lado, $\theta \in \mathbb{R}$, a fase global em $e^{i\theta}|\psi\rangle$, não pode ser medida. Isto é, $e^{i\theta}|\psi\rangle$ e $|\psi\rangle$ representam o mesmo estado.¹

O recurso quântico primordial para se executar o protocolo de teletransporte é um estado quântico maximamente emaranhado. Sendo assim, vamos supor que Alice e Bob compartilham um par de qubits maximamente emaranhados. Este estado é um dos quatro possíveis estados de Bell:

$$|\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}), \quad (3.2)$$

onde o qubit 2 é de Alice e o 3 é de Bob. Os quatro estados de Bell são:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (3.3)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (3.4)$$

O estado total inicial do sistema é dado pelo seguinte produto tensorial:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi^+\rangle_{23}. \quad (3.5)$$

Nosso objetivo é fazer com que o qubit 3 com Bob seja dado por $|\psi\rangle$ ao final do protocolo de teletransporte. Dizemos, neste caso, que teleportamos o qubit 1 (seu estado) para o qubit 3.

¹Sabemos que a matriz densidade do estado físico puro $|\psi\rangle$ é $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. A matriz densidade ρ é uma descrição mais geral de estados quânticos, indo além dos vetores $|\psi\rangle$. E se pode mostrar que toda a informação que podemos extrair de um sistema físico está contida em ρ [1, 2]. Ou seja, se dois sistemas tem a mesma matriz densidade, eles são fisicamente idênticos. Para o estado com fase global $|\tilde{\psi}\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$ temos $\tilde{\rho} = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = (e^{i\theta}|\psi\rangle)(\langle\psi|e^{-i\theta}) = e^{i\theta}e^{-i\theta}|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$. Isto é, $\tilde{\rho}$ e ρ são fisicamente idênticos, dados pela mesma matriz densidade.

3.2.2 Reescrevendo o estado total inicial

A Eq. (3.5) pode ser explicitamente escrita como segue,

$$|\Psi\rangle = (a|0\rangle_1 + be^{i\phi}|1\rangle_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}). \quad (3.6)$$

Usando a **distributividade** do produto tensorial:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle_1 \otimes |00\rangle_{23} + a|0\rangle_1 \otimes |11\rangle_{23} + be^{i\phi}|1\rangle_1 \otimes |00\rangle_{23} \\ & + be^{i\phi}|1\rangle_1 \otimes |11\rangle_{23}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, numa notação mais compacta:

$$|0\rangle_1 \otimes |00\rangle_{23} = |000\rangle, \quad (3.8)$$

$$|0\rangle_1 \otimes |11\rangle_{23} = |011\rangle, \quad (3.9)$$

$$|1\rangle_1 \otimes |00\rangle_{23} = |100\rangle, \quad (3.10)$$

$$|1\rangle_1 \otimes |11\rangle_{23} = |111\rangle. \quad (3.11)$$

Substituindo na equação (3.6):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a|000\rangle + a|011\rangle + be^{i\phi}|100\rangle + be^{i\phi}|111\rangle). \quad (3.12)$$

Observa-se que o sistema de três qubits é um estado puro, resultante da combinação do qubit a ser teletransportado com o par emaranhado compartilhado.

Reorganizando a equação (3.12):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a|00\rangle_{12}|0\rangle_3 + a|01\rangle_{12}|1\rangle_3 + be^{i\phi}|10\rangle_{12}|0\rangle_3 + be^{i\phi}|11\rangle_{12}|1\rangle_3). \quad (3.13)$$

Usando as relações entre a base computacional e a base de Bell, isto é, isolando $|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ a partir das Eqs. (3.3) e (3.4), temos

$$|00\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle_{12} + |\Phi^-\rangle_{12}), \quad (3.14)$$

$$|11\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle_{12} - |\Phi^-\rangle_{12}), \quad (3.15)$$

$$|01\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle_{12} + |\Psi^-\rangle_{12}), \quad (3.16)$$

$$|10\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi^+\rangle_{12} - |\Psi^-\rangle_{12}). \quad (3.17)$$

Substituindo em (3.13) e simplificando, obtemos:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2} \left[|\Phi^+\rangle_{12} (a|0\rangle_3 + be^{i\phi}|1\rangle_3) + |\Phi^-\rangle_{12} (a|0\rangle_3 - be^{i\phi}|1\rangle_3) \right. \\ \left. + |\Psi^+\rangle_{12} (be^{i\phi}|0\rangle_3 + a|1\rangle_3) + |\Psi^-\rangle_{12} (-be^{i\phi}|0\rangle_3 + a|1\rangle_3) \right]. \quad (3.18)$$

É importante ressaltar que estamos apenas reescrevendo o estado total em uma base mais conveniente, já que Alice realizará medidas projetivas na base de Bell e não na base computacional. Veja que a expressão (3.18) evidencia cada resultado possível da medida de Bell sobre os qubits 1 e 2. E cada um destes resultados leva a um estado específico para o qubit 3.

3.2.3 Medida projetiva na base de Bell

Agora, Alice faz uma medida projetiva na base de Bell.

A medida de Bell é descrita pelos projetores:

$$P_{\Phi^\pm} = |\Phi^\pm\rangle_{12} \langle \Phi^\pm| \otimes I_3, \quad P_{\Psi^\pm} = |\Psi^\pm\rangle_{12} \langle \Psi^\pm| \otimes I_3, \quad (3.19)$$

que satisfazem

$$\langle B_i | B_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^4 P_i = I, \quad (3.20)$$

onde $|B_j\rangle = \{|\Phi^+\rangle, |\Phi^-\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle\}$ representa a base de Bell, a qual forma um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert dos qubits 1 e 2.

Aplicando os projetores sobre o estado global dos três qubits,

$$P_{\Phi^\pm} |\Psi\rangle = (|\Phi^\pm\rangle \langle \Phi^\pm| \otimes I_3) |\Psi\rangle, \quad (3.21)$$

obtemos

$$P_{\Phi^\pm} |\Psi\rangle = \frac{1}{2} |\Phi^\pm\rangle_{12} (a|0\rangle_3 \pm be^{i\phi}|1\rangle_3). \quad (3.22)$$

Para chegar a última equação, usamos a ortonormalidade da base de Bell:

$$\langle \Phi^\pm | \Phi^\pm \rangle = \langle \Psi^\pm | \Psi^\pm \rangle = 1, \quad (3.23)$$

$$\langle \Phi^\pm | \Phi^\mp \rangle = \langle \Psi^\pm | \Psi^\mp \rangle = \langle \Phi^\pm | \Psi^\pm \rangle = \langle \Phi^\pm | \Psi^\mp \rangle = 0. \quad (3.24)$$

De forma análoga para os outros projetores:

$$P_{\Psi^\pm} |\Psi\rangle = \frac{1}{2} |\Psi^\pm\rangle_{12} (\pm be^{i\phi}|0\rangle_3 + a|1\rangle_3). \quad (3.25)$$

Assim, cada projetor seleciona exatamente um dos termos da superposição obtida, eliminando os demais devido à ortonormalidade da base de Bell.

O estado obtido não é normalizado e tem a forma

$$|\tilde{\psi}_i\rangle = P_i|\Psi\rangle. \quad (3.26)$$

De acordo com os postulados da mecânica quântica já estudados, a probabilidade de medir um estado de Bell é dada por

$$p_i = \langle \tilde{\psi}_i | \tilde{\psi}_i \rangle = \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle \quad (3.27)$$

e o estado normalizado após a medida é

$$|\psi_i\rangle = \frac{|\tilde{\psi}_i\rangle}{\sqrt{p_i}}. \quad (3.28)$$

3.2.4 Colapso e probabilidades

Após a realização da medida de Bell sobre os qubits 1 e 2, o estado do sistema colapsa para um dos quatro estados possíveis:

$$P_{\Phi^+}|\Psi\rangle, P_{\Phi^-}|\Psi\rangle, P_{\Psi^+}|\Psi\rangle, P_{\Psi^-}|\Psi\rangle. \quad (3.29)$$

Usando a Eq. (3.18), podemos escrever o estado global dos três qubits antes de qualquer medida como

$$|\psi\rangle = a|\Phi^+\rangle_{12}|\psi_1\rangle_3 + b|\Phi^-\rangle_{12}|\psi_2\rangle_3 + c|\Psi^+\rangle_{12}|\psi_3\rangle_3 + d|\Psi^-\rangle_{12}|\psi_4\rangle_3, \quad (3.30)$$

onde $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ e $|\psi_i\rangle_3$ são todos estados normalizados.

Como todos os estados acima são normalizados, então

$$p_i = \left| \frac{1}{2} \right|^2 \quad (3.31)$$

e portanto

$$p_{\Phi^+} = p_{\Phi^-} = p_{\Psi^+} = p_{\Psi^-} = \frac{1}{4}. \quad (3.32)$$

Dessa forma, teremos 4 casos com iguais chances de ocorrerem.

Caso 1: Alice mede $|\Phi^+\rangle$

Após Alice realizar a medida de Bell e obter $|\Phi^+\rangle$, o postulado da medida diz que o estado após a medida vale

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |\Phi^+\rangle_{12}|\psi_1\rangle_3 = |\Phi^+\rangle_{12} \otimes |\psi_1\rangle_3. \quad (3.33)$$

Ou seja, o estado dos dois qubits de Alice colapsa para $|\Phi^+\rangle$, enquanto o qubit de Bob é descrito pelo seguinte estado:

$$|\psi_1\rangle = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle. \quad (3.34)$$

Nesse caso, o estado de Bob coincide com o original teleportado por Alice (qubit 1) e o protocolo termina com sucesso sem novas intervenções.

Caso 2: Alice mede $|\Phi^-\rangle$

De forma análoga temos,

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |\Phi^-\rangle_{12} |\psi_2\rangle_3. \quad (3.35)$$

Com isso o estado com Bob é

$$|\psi_2\rangle = a|0\rangle - be^{i\phi}|1\rangle. \quad (3.36)$$

Esse caso difere do original apenas por uma fase relativa de π radianos. Note o sinal menos antes de b , o que não existe no qubit original (qubit 1). Para termos sucesso neste caso, precisamos corrigir o estado com Bob. Voltaremos neste ponto em breve.

Caso 3: Alice mede $|\Psi^+\rangle$

Agora obtemos

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |\Psi^+\rangle_{12} |\psi_3\rangle_3 \quad (3.37)$$

e, portanto, o estado com Bob passa a ser

$$|\psi_3\rangle = be^{i\phi}|0\rangle + a|1\rangle. \quad (3.38)$$

Nesse caso há uma troca dos estados base: $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$. Vamos precisar corrigir isso para finalizar o protocolo com sucesso.

Caso 4: Alice mede $|\Psi^-\rangle$

Por fim, se Alice obter $|\Psi^-\rangle$ como resultado de sua medida de Bell, o estado dos três qubits torna-se

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |\Psi^-\rangle_{12} |\psi_4\rangle_3. \quad (3.39)$$

Com isso, o qubit de Bob passa a ser

$$|\psi_4\rangle = -be^{i\phi}|0\rangle + a|1\rangle. \quad (3.40)$$

Agora não só trocamos os papéis entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ como também mudamos a fase relativa entre eles de π radianos. Novamente teremos que corrigir isso para finalizar o protocolo de teletransporte.

3.2.5 Comunicação clássica e correção

Alice deve informar a Bob qual foi o resultado obtido em sua medida de Bell. Como existem 4 possibilidades, essa informação pode ser codificada em dois bits clássicos que serão enviados a Bob. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
00 &\longrightarrow \text{Alice mede } |\Phi^+\rangle, & 10 &\longrightarrow \text{Alice mede } |\Psi^+\rangle, \\
01 &\longrightarrow \text{Alice mede } |\Phi^-\rangle, & 11 &\longrightarrow \text{Alice mede } |\Psi^-\rangle.
\end{aligned}$$

Após receber esta informação, Bob sabe exatamente qual estado descreve seu qubit: $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ ou $|\psi_4\rangle$.

Como Bob já sabe qual é seu estado, ele pode fazer a correção apropriada para recuperar exatamente o estado teleportado $|\psi\rangle = a|0\rangle + be^{i\phi}|1\rangle$.

É interessante, nesse momento, utilizar a representação matricial para os qubits e para as correções:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Vamos analisar os quatro casos à luz desta notação.

Caso 1: Alice mede $|\Phi^+\rangle$

Estado de Bob:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Aplicando a identidade:

$$I|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Ou seja, aplicar a identidade corresponde a não fazer nada já que neste caso o estado com Bob é exatamente aquele teleportado por Alice.

Caso 2: Alice mede $|\Phi^-\rangle$

Estado de Bob:

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ -be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Agora devemos aplicar a correção modelada matematicamente pela matriz de Pauli σ_z :

$$\sigma_z|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -be^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Assim, $|\psi\rangle$ é recuperado.

Caso 3: Alice mede $|\Psi^+\rangle$

Estado de Bob:

$$|\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} be^{i\phi} \\ a \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

A correção agora necessária é aquela modelada matematicamente pela matriz de Pauli σ_x :

$$\sigma_x |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} be^{i\phi} \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Assim, $|\psi\rangle$ é recuperado.

Caso 4: Alice mede $|\Psi^-\rangle$

Estado de Bob:

$$|\psi_4\rangle = \begin{pmatrix} -be^{i\phi} \\ a \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Precisamos, agora, de duas correções sucessivas. Primeiro σ_x e depois σ_z :

$$\sigma_z(\sigma_x |\psi_4\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -be^{i\phi} \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\phi} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Assim, $|\psi\rangle$ é recuperado em todos os casos.

Veja a importância da comunicação clássica. Sem essa informação, Bob não saberá qual correção implementar sobre seu qubit. Se Bob possuir essa informação, o protocolo de teletransporte funciona corretamente para qualquer estado de Bell medido. Sempre podemos corrigir o estado final com Bob a fim de termos exatamente o qubit 3 descrito pelo estado que originalmente descrevia o qubit 1.

3.3 Teletransporte Quântico Utilizando Portas Lógicas

3.3.1 Introdução

Como vimos acima, o teletransporte quântico permite transferir o estado de um qubit de um observador (Alice) para outro (Bob) utilizando emaranhamento quântico e comunicação clássica.

De forma esquemática, o protocolo requer os seguintes recursos e processos:

- um par de qubits emaranhados: estado de Bell compartilhado entre Bob e Alice;
- medida projetiva de Bell realizada por Alice;
- dois bits de comunicação clássica enviados de Alice para Bob;
- operações unitárias realizadas por Bob.

Nosso objetivo é reapresentar o protocolo de teletransporte na linguagem de portas lógicas quânticas. Dessa forma, vamos revisitar o teletransporte quântico abaixo com isso em mente.

Já sabemos que desejamos transferir o estado $|\psi\rangle$ de Alice para Bob:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (3.51)$$

onde

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (3.52)$$

O estado $|\psi\rangle$ é completamente arbitrário e, em geral, **desconhecido** por Alice. Essa é uma das características mais surpreendentes do protocolo: não é necessário que Alice saiba quais são os coeficientes α e β para que o teletransporte funcione. De fato, se Alice tentasse descobrir α e β medindo o qubit, destruiria o estado no processo, pois toda medida quântica causa o colapso da função de onda.

A ideia central é que o emaranhamento quântico, uma correlação não-clássica entre dois qubits, funciona como um “canal quântico” que permite transferir a informação quântica. Por outro lado, os dois bits enviados a Bob por um “canal clássico” serve para que ele saiba qual correção aplicar. Nenhum dos dois canais sozinho é suficiente: sem o emaranhamento, os bits clássicos não carregam informação quântica; sem os bits clássicos, Bob não sabe qual operação aplicar. É essa combinação que torna o protocolo possível.

3.3.2 Estado inicial

Antes de iniciar o protocolo, Alice e Bob precisam compartilhar um par de qubits emaranhados. Esse par é preparado no estado de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (3.53)$$

Este é um dos quatro estados de Bell, estados maximamente emaranhados de dois qubits. O primeiro qubit do par fica com Alice (qubit 2) e o segundo vai para Bob (qubit 3). É fundamental entender que esses dois qubits foram emaranhados *previamente* e depois separados fisicamente. Alice e Bob podem estar em cidades diferentes, mas seus qubits continuam correlacionados de maneira puramente quântica.

Temos, portanto, três qubits no total:

- **Qubit 1:** o qubit que Alice deseja teletransportar, no estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$;
- **Qubit 2:** a metade do par de Bell que está com Alice;
- **Qubit 3:** a metade do par de Bell que está com Bob.

O estado total inicial do sistema de três qubits é dado pelo produto tensorial entre o estado de Alice e o par de Bell:

$$|\Psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle. \quad (3.54)$$

Vamos agora expandir essa expressão passo a passo, para que fique claro como o sistema se comporta. Substituindo (3.51) e (3.53) em (3.54):

$$|\Psi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (3.55)$$

O produto tensorial é distributivo em relação à soma de vetores. Isso significa que podemos “abrir os parênteses” exatamente como faríamos com números, mas respeitando a ordem dos fatores (pois qubits diferentes ocupam posições distintas no produto tensorial). Colocando o fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$ em evidência:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle). \quad (3.56)$$

Expandindo completamente, isto é, multiplicando cada termo dentro do primeiro par de parênteses por cada termo dentro do segundo par de parênteses:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle). \quad (3.57)$$

Nesta notação, a ordem dos dígitos dentro de cada ket é sempre **qubit 1, qubit 2, qubit 3**. Por exemplo, $|011\rangle$ significa que o qubit 1 está no estado $|0\rangle$, o qubit 2 no estado $|1\rangle$ e o qubit 3 no estado $|1\rangle$. Essa convenção será mantida ao longo de todo o protocolo.

Observe que, neste ponto, o estado é uma superposição de quatro termos. Ainda não houve nenhuma operação por parte de Alice. O estado acima descreve matematicamente o sistema global de três qubits no instante inicial. Os próximos passos consistem em Alice aplicar portas lógicas e realizar medidas em seus dois qubits (1 e 2), de modo a “transferir” a informação quântica (o estado) do qubit 1 para o qubit 3 de Bob.

3.3.3 Aplicação da porta CNOT

A primeira operação que Alice aplica é uma porta CNOT (Controlled-NOT) entre os qubits 1 e 2, com o qubit 1 atuando como **controle** e o qubit 2 como **alvo**.

A porta CNOT funciona da seguinte maneira: ela olha o valor do qubit de controle; se ele for $|0\rangle$, o qubit alvo permanece inalterado; se for $|1\rangle$, o qubit alvo é invertido (ou seja, sofre a operação NOT, que troca $|0\rangle$ por $|1\rangle$ e vice-versa). Em notação compacta, a ação nos estados da base computacional de dois qubits é:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad (\text{controle} = 0, \text{alvo não muda}), \quad (3.58)$$

$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad (\text{controle} = 0, \text{alvo não muda}), \quad (3.59)$$

$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (\text{controle} = 1, \text{alvo é invertido: } 0 \rightarrow 1), \quad (3.60)$$

$$|11\rangle \rightarrow |10\rangle, \quad (\text{controle} = 1, \text{alvo é invertido: } 1 \rightarrow 0). \quad (3.61)$$

Agora, note que a CNOT atua apenas nos qubits 1 e 2 enquanto o qubit 3 (que está com Bob) não é afetado de forma alguma. Assim, ao aplicar a CNOT no estado (3.57), devemos transformar apenas os dois primeiros dígitos de cada ket, mantendo o terceiro intacto:

$$|000\rangle \rightarrow |000\rangle, \quad (3.62)$$

$$|011\rangle \rightarrow |011\rangle, \quad (3.63)$$

$$|100\rangle \rightarrow |110\rangle, \quad (3.64)$$

$$|111\rangle \rightarrow |101\rangle. \quad (3.65)$$

Logo, o estado do sistema após a aplicação da CNOT é:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle). \quad (3.66)$$

O papel da CNOT aqui é **criar correlações** entre o qubit 1 (que carrega o estado a ser teletransportado) e o qubit 2 (que faz parte do par emaranhado com Bob). Em certo sentido, a CNOT está “espalhando” a informação de $|\psi\rangle$ para dentro do par emaranhado, iniciando o processo pelo qual essa informação chegará ao qubit 3.

3.3.4 Aplicação da porta Hadamard

A segunda operação que Alice realiza é aplicar uma porta Hadamard H exclusivamente no qubit 1. A porta Hadamard é uma das operações mais importantes em computação quântica: ela cria superposições a partir dos estados-base. Sua ação nos estados da base computacional é:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.67)$$

Observe que H transforma estados “bem definidos” ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$) em superposições com pesos iguais, mas com sinais diferentes: quando aplicada a $|0\rangle$, a superposição tem sinal positivo; quando aplicada a $|1\rangle$, tem sinal negativo. É justamente essa diferença de sinais que permitirá distinguir os resultados de medida mais adiante.

Vamos agora aplicar H ao qubit 1 de cada termo de $|\Psi_1\rangle$ em (3.66). Fazemos isso termo a termo, lembrando que a Hadamard atua apenas no **primeiro** dígito de cada ket:

$$\alpha|000\rangle \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle), \quad (3.68)$$

$$\alpha|011\rangle \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |111\rangle), \quad (3.69)$$

$$\beta|110\rangle \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |110\rangle), \quad (3.70)$$

$$\beta|101\rangle \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |101\rangle). \quad (3.71)$$

Vejamos mais explicitamente um dos quatro casos acima, aquele da terceira linha: o estado $|110\rangle$ tem qubit 1 dado por $|1\rangle$. Aplicando H : $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Assim, $|110\rangle$ vira $\frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |110\rangle)$. O sinal negativo aparece sempre que o qubit 1 for dado por $|1\rangle$.

Somando todos os termos e lembrando que já havia um fator $\frac{1}{\sqrt{2}}$ em (3.66), o estado completo fica:

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle = & \frac{1}{2} (\alpha|000\rangle + \alpha|100\rangle + \alpha|011\rangle + \alpha|111\rangle \\ & + \beta|010\rangle - \beta|110\rangle + \beta|001\rangle - \beta|101\rangle). \end{aligned} \quad (3.72)$$

A etapa crucial agora é **reorganizar** essa expressão, agrupando os termos de acordo com o estado dos qubits 1 e 2 (os dois primeiros dígitos). Isso nos permitirá ver claramente o que acontece com o qubit 3 (de Bob) para cada resultado possível de medida de Alice. Agrupando:

$$\boxed{|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)]}. \quad (3.73)$$

Podemos verificar que este agrupamento está correto examinando, por exemplo, os termos associados a $|00\rangle$: procurando em (3.72) todos os kets cujos dois primeiros dígitos são 00, encontramos $\alpha|000\rangle + \beta|001\rangle = |00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$. De forma análoga checamos os outros três casos.

A equação (3.73) é a expressão mais importante de todo o protocolo. Ela nos diz que:

- Se os qubits 1 e 2 estiverem em $|00\rangle$, o qubit 3 está em $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. **Exatamente** o estado original $|\psi\rangle$.
- Se estiverem em $|01\rangle$, o qubit 3 está em $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$. Os coeficientes estão trocados.
- Se estiverem em $|10\rangle$, o qubit 3 está em $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$. Há uma fase espúria de π radianos: $e^{i\pi} = -1$.

- Se estiverem em $|11\rangle$, o qubit 3 está em $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$. Coeficientes trocados e fase espúria de π radianos.

Com exceção do primeiro caso, cada um desses outros casos corresponde a uma “versão distorcida” do estado original. E a distorção é sempre modelada por uma operação unitária simples (uma porta de Pauli). Isso significa que, em todos os casos, a informação completa do estado $|\psi\rangle$ já está codificada no qubit 3, bastando a Bob saber qual distorção ocorreu para poder corrigi-la.

3.3.5 Medição

Agora Alice mede os dois primeiros qubits (qubits 1 e 2) na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Essa medida destrói qualquer superposição nos qubits medidos: o sistema “colapsa” para um dos quatro termos de (3.73), e Alice obtém um resultado clássico: dois bits de informação.

Os possíveis resultados são:

$$00, \quad 01, \quad 10, \quad 11. \quad (3.74)$$

Cada um deles ocorre com probabilidade igual a $\frac{1}{4}$ (veremos a demonstração na Seção 3.3.9).

Dependendo do resultado da medida, o qubit de Bob (qubit 3) imediatamente colapsa para um dos seguintes estados:

Resultado	Estado de Bob	Relação com $ \psi\rangle$
00	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	igual ao original
01	$\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$	amplitudes permutadas
10	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$	sinal do segundo termo invertido
11	$\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$	ambas as distorções

A partir deste instante, Alice já não possui mais nenhuma informação quântica sobre o estado $|\psi\rangle$. Seus dois qubits colapsaram para um estado bem definido formado por combinações dos estados da base computacional: $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ ou $|11\rangle$. Toda a informação quântica está agora no qubit 3 de Bob, embora possivelmente “embaralhada” por uma das distorções listadas acima.

É importante observar que o colapso do qubit 3 ocorre **instantaneamente**, independentemente da distância entre Alice e Bob. No entanto, isso **não** viola a os princípios da relatividade restrita e nem permite comunicação com informação movendo-se mais rapidamente do que a velocidade da luz no vácuo. De fato, Bob não consegue extrair informação útil de seu qubit sem saber qual dos quatro resultados Alice obteve. E a informação sobre esse resultado da medida de Alice precisa chegar a Bob por meio de um canal clássico de comunicação, o qual não transmite informação a uma velocidade superior a da luz.

3.3.6 Correções de Pauli

Alice comunica a Bob o resultado de sua medição usando dois bits clássicos (por telefone, e-mail, luz, pombo-correio; qualquer meio clássico serve). Com essa informação, Bob aplica a operação corretiva adequada em seu qubit:

Resultado	Operação	Justificativa
00	I (identidade)	estado já está correto
01	X (Pauli- X)	permuta $ 0\rangle \leftrightarrow 1\rangle$
10	Z (Pauli- Z)	inverte a fase de $ 1\rangle$
11	XZ	primeiro inverte a fase, depois permuta

As matrizes de Pauli usadas são:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Verifiquemos explicitamente cada caso:

Resultado 00: O estado de Bob já é $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle$. Bob aplica I (não faz nada):

$$I \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\psi\rangle. \quad (3.76)$$

Resultado 01: O estado de Bob é $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$. As amplitudes estão trocadas. Bob aplica X :

$$X \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\psi\rangle. \quad (3.77)$$

Resultado 10: O estado de Bob é $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$. Há uma inversão de fase. Bob aplica Z :

$$Z \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\psi\rangle. \quad (3.78)$$

Resultado 11: O estado de Bob é $\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$. Há troca de amplitudes e inversão de fase. Bob aplica XZ :

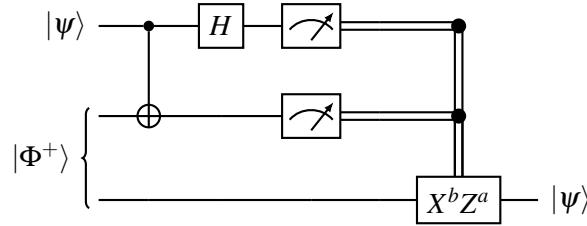
$$XZ \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

O resultado $\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = -|\psi\rangle$ difere de $|\psi\rangle$ apenas por uma fase global de -1 , que não tem significado físico (como demonstrado anteriormente quando lidamos com o operador densidade ρ). Portanto, o estado é fisicamente idêntico a $|\psi\rangle$.

Em todos os casos, Bob recupera com sucesso o estado original $|\psi\rangle$. E note que se no último caso tivéssemos trocado a ordem de aplicação das portas X e Z , teríamos exatamente $|\psi\rangle$ sem o sinal global menos. Isto é, se tivéssemos implementado ZX ao invés de XZ obteríamos diretamente $|\psi\rangle$. No entanto, como já dissemos, na mecânica quântica estados diferindo por uma fase global $e^{i\theta}$ são indistinguíveis. Os estados $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta}|\psi\rangle$ fornecem as mesmas previsões experimentais. No caso específico aqui, $\theta = \pi$.

3.3.7 Circuito Quântico

O protocolo completo pode ser resumido de forma compacta através de um circuito quântico. A leitura do circuito se faz da esquerda para a direita, e cada fio horizontal representa um qubit:



Aqui, a e b são os bits clássicos obtidos pela medida dos qubits 1 e 2, respectivamente. Isto é, a e b podem ser 0 ou 1. E devemos interpretar a operação X^0 como sendo a identidade e X^1 como sendo X . O mesmo vale para Z^0 e Z^1 . As operações no circuito ocorrem na seguinte ordem:

1. **Preparação:** O par de Bell $|\Phi^+\rangle$ é criado a partir de dois qubits $|0\rangle$ (isso seria feito por um circuito adicional de preparação, aplicando H e CNOT, que aqui omitimos por simplicidade).
2. **CNOT:** Alice aplica a porta CNOT com controle no qubit 1 e alvo no qubit 2.
3. **Hadamard:** Alice aplica H no qubit 1.
4. **Medição:** Alice mede ambos os qubits 1 e 2 na base computacional, obtendo dois bits clássicos.
5. **Correção:** Bob aplica $X^b Z^a$ em seu qubit 3, recuperando $|\psi\rangle$.

3.3.8 Base de Bell

Para uma compreensão mais profunda do protocolo, é útil conhecer a base de Bell. Os quatro estados de Bell formam uma base ortonormal para o espaço de Hilbert de dois qubits ($\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, que tem dimensão 4):

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (3.80)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (3.81)$$

Cada um desses estados é maximamente emaranhado. Medindo um dos qubits sabemos qual é o estado do outro qubit com 100% de certeza. Há uma correlação perfeita entre os dois qubits.

Usando a base de Bell e as portas de Pauli (matrizes de Pauli), o estado $|\Psi_2\rangle$ [Eq. (3.73)] pode ser reescrito da seguinte forma:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle|\psi\rangle + |\Phi^-\rangle(Z|\psi\rangle) + |\Psi^+\rangle(X|\psi\rangle) + |\Psi^-\rangle(XZ|\psi\rangle)]. \quad (3.82)$$

Esta expressão mostra de maneira transparente a estrutura do protocolo: para cada estado de Bell obtido ao projetarmos (medirmos) os qubits 1 e 2 na base de Bell, o qubit 3 é dado pelo estado $|\psi\rangle$ a menos de uma operação lógica local (transformação unitária). E esta transformação é sempre uma porta de Pauli (incluindo a identidade I).

3.3.9 Probabilidades de Medição

Observando a Eq. (3.73), vemos que a amplitude associada a cada resultado de medição é $\frac{1}{2}$. A probabilidade de cada resultado é o quadrado do módulo da amplitude:

$$P(ij) = |\langle ij|\Psi_2\rangle|^2 \quad (3.83)$$

Então:

$$P(00) = P(01) = P(10) = P(11) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}. \quad (3.84)$$

Os quatro resultados são equiprováveis, independentemente do estado $|\psi\rangle$ que está sendo teletransportado. Isso faz sentido intuitivamente: a medida de Alice não pode revelar nenhuma informação sobre $|\psi\rangle$ (pois, caso contrário, seria possível clonar estados quânticos, o que é proibido pelo Teorema da Não-Clonagem). Logo, os resultados devem ser completamente aleatórios.

3.3.10 Teorema da Não-Clonagem

O protocolo de teletransporte não viola o Teorema da Não-Clonagem. De fato, ele o respeita de maneira essencial: ao final do protocolo, o estado $|\psi\rangle$ existe apenas no qubit 3 de Bob; o qubit 1 de Alice foi destruído pela medida. Não existe cópia.

Para demonstrar o teorema, suponha existir uma operação unitária U capaz de clonar estados arbitrários:

$$U(|\psi\rangle|0\rangle) = |\psi\rangle|\psi\rangle. \quad (3.85)$$

Para dois estados arbitrários $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$:

$$U(|\psi\rangle|0\rangle) = |\psi\rangle|\psi\rangle, \quad (3.86)$$

$$U(|\phi\rangle|0\rangle) = |\phi\rangle|\phi\rangle. \quad (3.87)$$

Calculando o vetor dual da última equação (o bra) e calculando seu produto interno com a penúltima equação (e usando o fato de que U preserva o produto interno, por ser unitária):

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^2. \quad (3.88)$$

Essa equação $x = x^2$ tem como únicas soluções $x = 0$ ou $x = 1$. Isso só ocorre se

$$\langle\psi|\phi\rangle = 0 \quad (\text{estados ortogonais}) \quad (3.89)$$

ou

$$\langle\psi|\phi\rangle = 1 \quad (\text{estados idênticos}). \quad (3.90)$$

Logo, não é possível clonar estados quânticos arbitrários. Um dispositivo de clonagem só poderia clonar estados que fossem idênticos entre si ou mutuamente ortogonais — e não serve para estados desconhecidos e genéricos.

3.3.11 Exemplos

Para tornar o protocolo ainda mais concreto, vamos acompanhar três exemplos numéricos, realizando todo o cálculo passo a passo.

Estado $|0\rangle$

Queremos teletransportar $|\psi\rangle = |0\rangle$ (ou seja, $\alpha = 1$, $\beta = 0$).

Estado inicial:

$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle). \quad (3.91)$$

Após a porta CNOT: Como o qubit 1 é $|0\rangle$ em ambos os termos, a CNOT não altera nada:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle). \quad (3.92)$$

Após Hadamard no qubit 1:

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[(|0\rangle + |1\rangle)|00\rangle + (|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2}(|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Agrupando:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \left[|00\rangle|0\rangle + |01\rangle|1\rangle + |10\rangle|0\rangle + |11\rangle|1\rangle \right]. \quad (3.94)$$

Medida e correção:

Resultado	Estado de Bob	Operação	Resultado final
00	$ 0\rangle$	I	$ 0\rangle$
01	$ 1\rangle$	X	$ 0\rangle$
10	$ 0\rangle$	Z	$ 0\rangle$
11	$ 1\rangle$	ZX	$ 0\rangle$

Estado $|1\rangle$

Queremos teletransportar $|\psi\rangle = |1\rangle$ ($\alpha = 0, \beta = 1$).

Estado inicial:

$$|\Psi_0\rangle = |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |111\rangle). \quad (3.95)$$

Após a porta CNOT:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|110\rangle + |101\rangle). \quad (3.96)$$

Após Hadamard no qubit 1:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle). \quad (3.97)$$

Agrupando:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \left[|00\rangle|1\rangle + |01\rangle|0\rangle - |10\rangle|1\rangle - |11\rangle|0\rangle \right]. \quad (3.98)$$

Medida e correção: Em todos os casos, Bob recupera $|1\rangle$ após a operação corretiva adequada, seguindo o padrão da tabela anterior.

Superposição $|0\rangle + |1\rangle$

Queremos teletransportar $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ ($\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Estado inicial:

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) (|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Após a porta CNOT:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2} (|000\rangle + |011\rangle + |110\rangle + |101\rangle). \quad (3.100)$$

Após Hadamard:

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle \\ &\quad + |010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[|00\rangle \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + |01\rangle \frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. + |10\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} + |11\rangle \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Resultado 00: Bob obtém $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = |\psi\rangle$. Aplica I (não faz nada).

Resultado 01: Bob obtém $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = |\psi\rangle$. Aplica X (neste caso particular, $X|+\rangle = |+\rangle$).

Resultado 10: Bob obtém $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$. Aplica Z : $Z|-\rangle = |+\rangle = |\psi\rangle$.

Resultado 11: Bob obtém $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) = -|-\rangle$. Aplica ZX : $ZX(-|-\rangle) = Z|-\rangle = |+\rangle = |\psi\rangle$.

3.3.12 Conclusão

O teletransporte quântico mostra que informação quântica pode ser transferida utilizando emaranhamento e comunicação clássica, sem que o estado quântico precise percorrer fisicamente o espaço entre Alice e Bob. O protocolo garante:

1. **Fidelidade perfeita:** o estado é transferido sem nenhuma degradação ou perda de informação.

2. **Não-clonagem:** o estado original é destruído no processo, respeitando o Teorema da Não-Clonagem.
3. **Impossibilidade de comunicação superluminal:** a necessidade dos dois bits clássicos impede o uso do teletransporte para enviar informação superluminal (propagando-se mais rápido que a velocidade da luz).
4. **Universalidade:** o protocolo funciona para qualquer estado $|\psi\rangle$, sem que Alice precise conhecê-lo.

Capítulo 4

Realização Experimental

Mais à frente revisitaremos novamente o protocolo de teletransporte, reescrevendo todas suas etapas numa notação que permite analisar sua primeira realização experimental [8], a qual foi feita usando-se estados de polarização de fótons para codificar os qubits. Veja a Fig. 4.1.

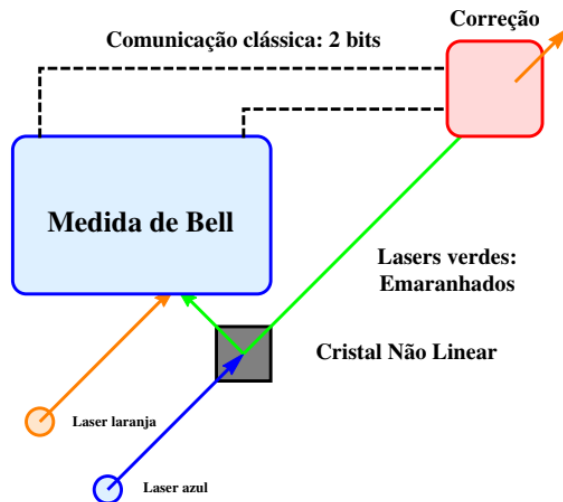


Figura 4.1: Representação esquemática do protocolo de teletransporte. Um fóton de alta frequência (laser azul) incide sobre um cristal não-linear gerando um par de fótons emaranhados de menor frequência (lasers verdes). O fóton a ser teleportado está representado pelo laser laranja. Em seguida Alice implementa uma medida de Bell envolvendo o fóton laranja e um dos fótons verde, informando Bob sobre o resultado de sua medida (2 bits de informação). Com essa informação, Bob implementa uma transformação unitária apropriada sobre seu fóton. Após essa etapa, o fóton de Bob passa a ser descrito exatamente pelo estado quântico que originalmente descrevia o fóton teleportado (laser laranja emergindo após a correção unitária). Figura e legenda extraídas da Ref. [9].

Antes de passarmos a essa descrição do protocolo de teletransporte, precisamos introduzir novos conceitos físicos, uma nova notação e também um novo postulado da mecânica quântica.

4.1 Fótons e Operadores de Criação

A formulação moderna da óptica quântica é baseada no formalismo de segunda quantização, no qual os estados do campo eletromagnético são descritos por meio de operadores de criação e aniquilação atuando sobre o estado de vácuo. Tal abordagem é particularmente adequada para a análise de experimentos envolvendo interferência quântica, medidas de Bell e teletransporte quântico envolvendo fótons.

Considere inicialmente um fóton polarizado verticalmente propagando-se ao longo de um determinado modo espacial a . Nesse caso, o estado do sistema pode ser representado por

$$|(1_V)_a\rangle = a_V^\dagger |vac\rangle, \quad (4.1)$$

onde $a_V^\dagger$ representa o operador de criação associado a um fóton de polarização vertical no modo espacial a , enquanto $|vac\rangle$ denota o estado de vácuo do campo eletromagnético. A polarização do fóton representa a direção do vetor do campo elétrico associado ao fóton. Por exemplo, um feixe de laser polarizado verticalmente é formado por trilhões de fótons de mesma frequência, energia e momento, onde o vetor polarização de todos os fótons oscilam em uníssono (coerentemente) ao longo da direção vertical. Se este feixe encontrar alguma carga elétrica, elas passaram a oscilar na direção vertical, a mesma direção da polarização.

De maneira análoga, podem ser definidos os estados correspondentes às demais combinações de polarização e caminho óptico:

$$a_H^\dagger |vac\rangle = |(1_H)_a\rangle, \quad (4.2)$$

$$b_V^\dagger |vac\rangle = |(1_V)_b\rangle, \quad (4.3)$$

$$b_H^\dagger |vac\rangle = |(1_H)_b\rangle. \quad (4.4)$$

Nesta notação, os índices a e b identificam os modos espaciais de propagação (por onde os fótons seguem), enquanto os subscritos V e H indicam as polarizações vertical e horizontal, respectivamente.

4.1.1 Estados de Dois Fótons

A partir dos operadores de criação, é possível construir estados contendo mais de um fóton. Por exemplo, um estado composto por dois fótons verticalmente polarizados, propagando-se em modos espaciais distintos, pode ser escrito como

$$a_V^\dagger b_V^\dagger |vac\rangle = |(1_V)_a(1_V)_b\rangle. \quad (4.5)$$

Equivalentemente, pode-se utilizar a notação de produto tensorial,

$$|(1_V)_a\rangle \otimes |(1_V)_b\rangle, \quad (4.6)$$

ou ainda a forma abreviada

$$|1_V\rangle_a |1_V\rangle_b. \quad (4.7)$$

De maneira semelhante, os demais estados de dois fótons distribuídos entre os modos espaciais a e b são dados por

$$a_H^\dagger b_H^\dagger |vac\rangle = |(1_H)_a (1_H)_b\rangle, \quad (4.8)$$

$$a_V^\dagger b_H^\dagger |vac\rangle = |(1_V)_a (1_H)_b\rangle, \quad (4.9)$$

$$a_H^\dagger b_V^\dagger |vac\rangle = |(1_H)_a (1_V)_b\rangle. \quad (4.10)$$

Todos esses estados encontram-se devidamente normalizados, satisfazendo

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (4.11)$$

Além disso, como os fótons são partículas bosônicas, os operadores de criação obedecem determinadas relações de comutação. Para modos espaciais distintos,

$$a^\dagger b^\dagger = b^\dagger a^\dagger, \quad (4.12)$$

o que implica neste caso que a ordem de aplicação dos operadores não altera o estado físico obtido.

4.1.2 Estados Bosônicos Idênticos

Uma característica fundamental dos bósons, os quais são partículas de spin inteiro, manifesta-se quando múltiplas partículas ocupam exatamente o mesmo estado quântico. Considere dois fótons com mesma polarização, mesma energia e propagando-se no mesmo modo espacial (mesmo momento). O estado correspondente é descrito por

$$a_V^\dagger a_V^\dagger |vac\rangle. \quad (4.13)$$

Usando as propriedades dos operadores de criação para bósons, obtém-se

$$a_V^\dagger a_V^\dagger |vac\rangle = a_V^\dagger |(1_V)_a\rangle = \sqrt{2} |(2_V)_a\rangle. \quad (4.14)$$

De forma geral, a ação do operador de criação sobre um estado contendo n bósons do mesmo tipo é dada por

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (4.15)$$

Essa relação constitui uma das propriedades fundamentais dos sistemas bosônicos e está diretamente associada ao fenômeno conhecido como *bunching*, segundo o qual partículas indistinguíveis bosônicas tendem a ocupar o mesmo estado quântico. Podemos pensar essa relação como mais um postulado da mecânica quântica, o qual nos diz como lidar com múltiplas partículas idênticas bosônicas.

4.2 O Divisor de Feixe

Um dos componentes fundamentais da óptica quântica experimental é o divisor de feixe (*beam splitter*), geralmente representado pela sigla BS. Um divisor de feixe balanceado é um dispositivo óptico projetado de modo a transmitir metade da intensidade luminosa incidente e refletir a outra metade.

Embora a descrição clássica indique uma divisão da intensidade do campo eletromagnético, a interpretação quântica requer uma abordagem probabilística. Quando um único fóton incide sobre um divisor de feixe ideal balanceado, existem duas possibilidades mutuamente exclusivas: transmissão ou reflexão do fóton como um todo. Ele não se divide. Cada uma dessas alternativas ocorre com probabilidade igual a 50%.

O processo de reflexão também introduz uma diferença de fase de $\frac{\pi}{2}$ radianos (90°) entre o feixe transmitido e o refletido.

Antes da interação com o divisor de feixe, o campo elétrico associado ao feixe de laser incidente pode ser descrito por meio de uma onda plana [10]

$$\vec{E}_I = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}_a \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4.16)$$

onde $\vec{k}_a$ é o vetor de onda, ω a frequência angular e $\vec{E}_0$ a amplitude do campo. Note que a propagação do feixe ocorre na direção em que o vetor de onde $\vec{k}_a$ aponta ao passo que a polarização do feixe é orientada na direção do vetor $\vec{E}_0$.

Após a interação com o dispositivo, surgem dois campos distintos. O campo transmitido é dado por

$$\vec{E}_T = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} \cos(\vec{k}_a \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (4.17)$$

enquanto o campo refletido assume a forma

$$\vec{E}_R = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} \cos(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (4.18)$$

O fator $1/\sqrt{2}$ garante a conservação da energia ou, equivalentemente, o fato de que a probabilidade de se observar um fóton refletido ou transmitido deve somar um. Devemos pensar $1/\sqrt{2}$ como o módulo da amplitude de probabilidade cujo quadrado nos dá uma probabilidade $1/2$ de transmissão ou de reflexão. Num feixe de laser, metade da intensidade é transmitida e metade é refletida, preservando-se a energia total do sistema.

4.2.1 Energia após o divisor de feixe

Vamos mostrar que após o divisor de feixe (BS), a energia total corresponde à soma das energias dos feixes transmitido e refletido. De fato, para o feixe transmitido, tem-se

$$\text{Energia}_T \propto \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\vec{E}_T|^2 dt, \quad (4.19)$$

onde

$$\vec{E}_T = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} \cos(\vec{k}_a \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (4.20)$$

e τ corresponde a um período de oscilação do campo eletromagnético. Estamos usando o fato de que a densidade de energia no campo elétrico é proporcional ($\propto$) ao quadrado do seu módulo [10].

Substituindo a Eq. (4.20) em (4.19), obtém-se

$$\text{Energia}_T \propto \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |\vec{E}_T|^2 dt = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\vec{k}_a \cdot \vec{r} - \omega t) dt. \quad (4.21)$$

O fator $\frac{1}{2}$ provém de $(1/\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}$. Utilizando que

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos^2(\vec{k}_a \cdot \vec{r} - \omega t) dt = \frac{1}{2}, \quad (4.22)$$

temos

$$\boxed{\text{Energia}_T \propto \frac{|\vec{E}_0|^2}{4}}. \quad (4.23)$$

Analogamente, para o feixe refletido,

$$\boxed{\text{Energia}_R \propto \frac{|\vec{E}_0|^2}{4}}. \quad (4.24)$$

A conservação da energia é verificada de modo imediato, pois uma conta similar à anterior dá

$$\text{Energia}_I \propto \frac{|\vec{E}_0|^2}{2}. \quad (4.25)$$

Dessa forma,

$$\text{Energia}_T + \text{Energia}_R \propto \frac{|\vec{E}_0|^2}{4} + \frac{|\vec{E}_0|^2}{4} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2}. \quad (4.26)$$

Logo,

$$\boxed{\text{Energia}_T + \text{Energia}_R = \text{Energia}_I}. \quad (4.27)$$

Esta análise justifica, de modo intuitivo, a presença do fator $1/\sqrt{2}$ nas amplitudes.

4.2.2 A fase extra devido à reflexão

Usando a identidade de Euler,

$$e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad (4.28)$$

e que $\cos(\pi/2) = 0$ e $\sin(\pi/2) = 1$, temos

$$\boxed{e^{i\pi/2} = i.} \quad (4.29)$$

Na representação complexa de uma onda plana [10], a fase $\pi/2$ adquirida pelo feixe refletido é representada pela unidade imaginária i . Assim, para o feixe refletido,

$$\frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t + \pi/2)} = \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{i\pi/2}, \quad (4.30)$$

e, portanto,

$$\boxed{\frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t + \pi/2)} = i \frac{\vec{E}_0}{\sqrt{2}} e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.31)}$$

Observando os campos elétricos antes e depois de atravessarem o divisor de feixe, vemos que o campo transmitido ganha um fator de $1/\sqrt{2}$ e o campo refletido ganha um fator de $i/\sqrt{2}$. Resta, agora, adaptar a ação do divisor de feixe para o caso de um único fóton. Mais precisamente, desejamos responder à seguinte questão: *como representar matematicamente a ação do divisor de feixe sobre um fóton?* A resposta é fornecida pelos operadores de criação.

4.2.3 Ação do BS sobre um fóton

Quando um fóton incide pelo caminho a , dois processos podem ocorrer:

1. transmissão, com o fóton continuando pelo caminho a ;
2. reflexão, com atraso de fase de $\pi/2$ radianos e o fóton indo pelo caminho b .

A ação do divisor de feixe sobre o operador de criação associado ao caminho a é

$$\boxed{a^\dagger \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} a^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} b^\dagger.} \quad (4.32)$$

Interpretação. Como

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%, \quad (4.33)$$

existe uma probabilidade de 50% de o fóton prosseguir pelo caminho a e de 50% de ser refletido para o caminho b . O número complexo i representa a fase de $\pi/2$ adquirida pelo fóton refletido, uma vez que $e^{i\pi/2} = i$.

De modo análogo, quando o fóton incide pelo caminho b , a ação do divisor de feixes é

$$b^\dagger \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} a^\dagger, \quad (4.34)$$

ou, em ordem alfabética,

$$\boxed{b^\dagger \longrightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} a^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger.} \quad (4.35)$$

A ação do BS pode ser representada matricialmente por

$$\begin{pmatrix} a^\dagger \\ b^\dagger \end{pmatrix}_{\text{fim}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ b^\dagger \end{pmatrix}_{\text{início}}. \quad (4.36)$$

Em síntese, as relações fundamentais utilizadas adiante são

$$\boxed{a_\varepsilon^\dagger \xrightarrow{\text{BS}} \frac{1}{\sqrt{2}} a_\varepsilon^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} b_\varepsilon^\dagger} \quad (4.37)$$

$$\boxed{b_\varepsilon^\dagger \xrightarrow{\text{BS}} \frac{i}{\sqrt{2}} a_\varepsilon^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b_\varepsilon^\dagger} \quad (4.38)$$

em que $\varepsilon = V, H$. Aqui, V e H denotam dois estados de polarização ortogonais do fóton: vertical e horizontal, respectivamente.

4.3 Experimento de Hong-Ou-Mandel (*photon bunching*)

O experimento de Hong-Ou-Mandel ilustra de forma clara o aspecto bosônico dos fótons quando estes incidem sobre um divisor de feixe. Vamos analisar o que ocorre quando enviamos dois fótons simultaneamente a um divisor de feixe, um pelo caminho a e outro pelo caminho b . Veja Fig. 4.2. Supomos, também, que os fótons incidentes sejam idênticos, isto é, possuem a mesma polarização, energia e momento. Em outras palavras, eles têm todos os números quânticos idênticos.

Estado antes do BS

O estado inicial é

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a_V^\dagger b_V^\dagger |\text{vac}\rangle, \quad (4.39)$$

ou, equivalentemente,

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |1_V\rangle_a \otimes |1_V\rangle_b. \quad (4.40)$$

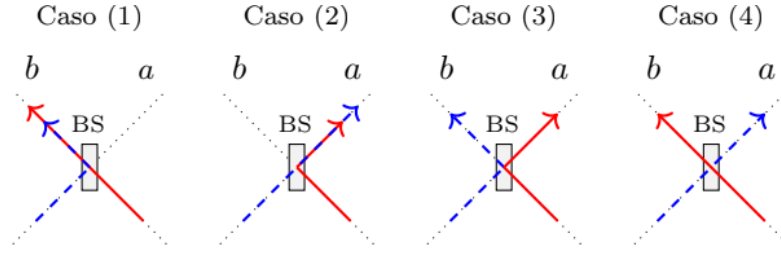


Figura 4.2: Duas partículas, cada uma vindo por caminhos diferentes (a e b), atingem um divisor de feixe balanceado (BS), o qual reflete cada partícula incidente 50% das vezes. Para partículas distinguíveis ou partículas “clássicas”, os quatro casos retratados na figura ocorrem com iguais chances (25% das vezes). No caso (1), as duas partículas seguem pelo caminho “b” após o divisor de feixe refletir apenas aquela vindo por “a”. No caso (2), ambas as partículas seguem por “a” após a partícula vindo por “b” ser refletida. No caso (3) as duas partículas são refletidas e no caso (4) ambas atravessam o divisor de feixe sem reflexão. Nestes dois últimos casos as duas partículas seguem por caminhos distintos após o divisor de feixe. Para bósons indistinguíveis, os casos (3) e (4) não ocorrem. Neste cenário, temos 50% de chance de ver as duas partículas no caminho “a” e 50% de chance de vê-las no caminho “b” após o divisor de feixe. Fótons com mesma polarização e frequência (energia) ao atingirem o divisor de feixe no mesmo instante tornam-se indistinguíveis. Não temos como saber, mesmo em princípio, qual fóton foi refletido e qual foi transmitido. Figura e legenda extraídas da Ref. [9].

Estado após o BS

Aplicando as transformações dos operadores de criação,

$$a_V^\dagger b_V^\dagger |\text{vac}\rangle \xrightarrow{\text{BS}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a_V^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} b_V^\dagger \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} a_V^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b_V^\dagger \right) |\text{vac}\rangle = |\psi\rangle_{\text{fim}}. \quad (4.41)$$

Expandindo o produto,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \left(\frac{i}{2} a_V^\dagger a_V^\dagger + \frac{1}{2} a_V^\dagger b_V^\dagger - \frac{1}{2} b_V^\dagger a_V^\dagger + \frac{i}{2} b_V^\dagger b_V^\dagger \right) |\text{vac}\rangle. \quad (4.42)$$

Como os operadores de criação bosônicos comutam, $a_V^\dagger b_V^\dagger = b_V^\dagger a_V^\dagger$, os termos cruzados se cancelam:

$$\frac{1}{2} a_V^\dagger b_V^\dagger - \frac{1}{2} b_V^\dagger a_V^\dagger = 0. \quad (4.43)$$

Logo,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \frac{i}{2} \left(a_V^\dagger a_V^\dagger + b_V^\dagger b_V^\dagger \right) |\text{vac}\rangle. \quad (4.44)$$

Reescrevendo cada termo,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \frac{i}{2} a_V^\dagger |1_V\rangle_a |0_V\rangle_b + \frac{i}{2} b_V^\dagger |0_V\rangle_a |1_V\rangle_b. \quad (4.45)$$

Empregando a regra bosônica $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$,

$$a_V^\dagger |1_V\rangle_a = \sqrt{2} |2_V\rangle_a, \quad b_V^\dagger |1_V\rangle_b = \sqrt{2} |2_V\rangle_b, \quad (4.46)$$

de modo que

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \frac{i\sqrt{2}}{2} |2_V\rangle_a |0_V\rangle_b + \frac{i\sqrt{2}}{2} |0_V\rangle_a |2_V\rangle_b. \quad (4.47)$$

Ou seja,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \frac{i}{\sqrt{2}} |2_V\rangle_a |0_V\rangle_b + \frac{i}{\sqrt{2}} |0_V\rangle_a |2_V\rangle_b \quad (4.48)$$

Como

$$\left| \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%, \quad (4.49)$$

obtém-se:

- 50% de probabilidade de observar dois fótons pelo caminho a ,
- 50% de probabilidade de observar dois fótons pelo caminho b .

Nunca se observa um fóton pelo caminho a e outro pelo caminho b . Temos aqui um efeito genuinamente quântico.

4.3.1 Comparação entre as descrições clássica e quântica

Descrição clássica

Classicamente, há quatro possibilidades equiprováveis, cada uma com probabilidade de 25%:

1. ambos os fótons saem pelo caminho a ;
2. um fóton sai por a e outro por b ;
3. um fóton sai por b e outro por a ;
4. ambos os fótons saem pelo caminho b .

Em particular, os eventos com um fóton em cada saída teriam probabilidade total de 50%.

Descrição quântica

Para fótons indistinguíveis, os eventos em que se observa um fóton em cada saída *não ocorrem*. As únicas possibilidades são:

- ambos os fótons no caminho *a*, com probabilidade 50%;
- ambos os fótons no caminho *b*, com probabilidade 50%.

A indistinguibilidade dos fótons é a origem do fenômeno de *bunching*: após o BS, os fótons agrupam-se à esquerda ou à direita do divisor, jamais se separando. Matematicamente, isso é consequência das propriedades de comutação e de ação dos operadores de criação no estado de vácuo ou em estados com fótons já presentes.

4.3.2 Fótons distinguíveis: comportamento clássico

Quando os fótons são distinguíveis, o comportamento clássico é recuperado. Seja o estado inicial com polarizações distintas,

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a_V^\dagger b_H^\dagger |\text{vac}\rangle = |1_V\rangle_a |1_H\rangle_b. \quad (4.50)$$

Aplicando as transformações

$$a_V^\dagger \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} a_V^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} b_V^\dagger, \quad b_H^\dagger \longrightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} a_H^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b_H^\dagger, \quad (4.51)$$

obtem-se

$$a_V^\dagger b_H^\dagger |\text{vac}\rangle \xrightarrow{\text{BS}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a_V^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}} b_V^\dagger \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}} a_H^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} b_H^\dagger \right) |\text{vac}\rangle. \quad (4.52)$$

Expandindo o produto,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \left(\frac{i}{2} a_V^\dagger a_H^\dagger + \frac{1}{2} a_V^\dagger b_H^\dagger - \frac{1}{2} a_H^\dagger b_V^\dagger + \frac{i}{2} b_V^\dagger b_H^\dagger \right) |\text{vac}\rangle. \quad (4.53)$$

Os termos cruzados *não se cancelam*, pois os fótons possuem polarizações distintas. Em termos de estados,

$$|\psi\rangle_{\text{fim}} = \frac{i}{2} |1_V, 1_H\rangle_a + \frac{1}{2} |1_V\rangle_a |1_H\rangle_b - \frac{1}{2} |1_H\rangle_a |1_V\rangle_b + \frac{i}{2} |1_V, 1_H\rangle_b \quad (4.54)$$

As probabilidades associadas são:

$$\left| \frac{i}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{dois fótons em } a), \quad (4.55)$$

$$\left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{um fóton } V \text{ em } a \text{ e um fóton } H \text{ em } b), \quad (4.56)$$

$$\left| -\frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{um fóton } H \text{ em } a \text{ e um fóton } V \text{ em } b), \quad (4.57)$$

$$\left| \frac{i}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (\text{dois fótons em } b). \quad (4.58)$$

Assim, no caso de fótons distinguíveis, obtemos as quatro possibilidades clássicas, cada uma ocorrendo 25% das vezes.

4.4 Medidas de Bell utilizando o divisor de feixe

Tendo-se estabelecido o formalismo matemático para modelar a ação do divisor de feixe sobre fótons incidentes e desenvolvido a intuição física de seu funcionamento a partir do efeito Hong-Ou-Mandel, é possível agora demonstrar como o divisor de feixe permite medir 2 dos 4 estados de Bell.

Como será visto, usando um divisor de feixe conseguimos distinguir apenas

$$|\psi^-\rangle \text{ e } |\psi^+\rangle. \quad (4.59)$$

Não seremos capazes de diferenciar entre

$$|\phi^+\rangle \text{ e } |\phi^-\rangle \quad (4.60)$$

por meio deste dispositivo óptico.

Dessa forma, o protocolo de teletransporte funciona apenas *condicionalmente* ao usarmos um divisor de feixe para realizar as medições de Bell. No experimento original de 1997 realizado pelo grupo de Anton Zeilinger [8], havia ainda uma outra limitação experimental que explicaremos mais à frente e somente $|\psi^-\rangle$ era mensurável, de modo que o protocolo era bem-sucedido em apenas 25% das tentativas.

Usando a notação desenvolvida neste capítulo, a Eq. (3.18) que representa o estado global dos três qubits no início do protocolo de teletransporte pode ser posta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \frac{1}{2} |\phi^+\rangle (\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle) + \frac{1}{2} |\phi^-\rangle (\alpha |V\rangle - \beta |H\rangle) \\ & + \frac{1}{2} |\psi^+\rangle (\alpha |H\rangle + \beta |V\rangle) + \frac{1}{2} |\psi^-\rangle (\alpha |H\rangle - \beta |V\rangle). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Agora, os três qubits denotam o estado de polarização de três fótons. Para chegar à Eq. (4.61), renomeamos na Eq. (3.18) $|0\rangle$ por $|V\rangle$, $|1\rangle$ por $|H\rangle$, a por α e $be^{i\phi}$ por β .

Por completeza, escrevemos aqui o estado de entrada, o fóton a ser teletransportado por Alice (qubit 1):

$$\alpha |V\rangle + \beta |H\rangle. \quad (4.62)$$

Para realizar a medida de Bell, enviamos os dois fótons em posse de Alice a um divisor de feixe e analisamos os estados dos fótons resultantes após o divisor. Os estados $|\phi^\pm\rangle$ e $|\psi^\pm\rangle$ correspondem aos dois fótons de Alice, sobre os quais aplicaremos a operação matemática que modela a ação do divisor de feixe. Representamos essa operação por $\text{BS} \otimes I$. Sua ação no estado dado pela Eq. (4.61) é

$$(\text{BS} \otimes I) |\Psi\rangle. \quad (4.63)$$

O símbolo BS representa a matriz 2×2 que descreve a ação do divisor de feixe sobre os operadores de criação dos dois fótons de Alice. O operador identidade

I indica que nenhuma operação é realizada sobre o terceiro qubit, isto é, sobre o fóton de Bob.

Para que os cálculos permaneçam claros, o procedimento será dividido em duas partes:

1. uma análise individual para cada um dos estados de Bell acima;
2. a posterior reunião dos resultados para a análise final.

4.4.1 Caso 1: Ação do divisor de feixe sobre $|\Phi^+\rangle$

O estado inicial a ser considerado é da forma:

$$(\text{BS} \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\text{BS}|\Phi^+\rangle}_{\text{divisor de feixe}} \otimes (\alpha|V\rangle + \beta|H\rangle) + \dots$$

Mas temos que:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_a|H\rangle_b + |V\rangle_a|V\rangle_b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_H^\dagger b_H^\dagger + a_V^\dagger b_V^\dagger)|0\rangle.$$

Aplicando a operação associada ao divisor de feixe,

$$a^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}a^\dagger + \frac{i}{\sqrt{2}}b^\dagger, \quad b^\dagger \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}a^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}}b^\dagger,$$

temos após a expansão e simplificação algébrica (os termos cruzados se cancelam):

$$\text{BS}|\Phi^+\rangle = \frac{i}{2\sqrt{2}}(a_V^{\dagger 2} + b_V^{\dagger 2} + a_H^{\dagger 2} + b_H^{\dagger 2})|0\rangle.$$

Convertendo para notação de números de fótons:

$$\text{BS}|\Phi^+\rangle = \frac{i}{2}(|2_V, 0\rangle_a + |0, 2_V\rangle_b + |2_H, 0\rangle_a + |0, 2_H\rangle_b).$$

Ou equivalentemente,

$$\boxed{\text{BS}|\Phi^+\rangle = \frac{i}{2}(|2_V\rangle_a|0\rangle_b + |2_H\rangle_a|0\rangle_b + |0\rangle_a|2_V\rangle_b + |0\rangle_a|2_H\rangle_b).} \quad (4.64)$$

4.4.2 Caso 2: Ação do divisor de feixe sobre $|\Phi^-\rangle$

Para o estado $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VV\rangle - |HH\rangle)$, a aplicação do BS segue de forma análoga, alterando o sinal relativo entre os termos de polarização horizontal e vertical:

$$\boxed{\text{BS}|\Phi^-\rangle = \frac{i}{2}(|2_V\rangle_a|0\rangle_b - |2_H\rangle_a|0\rangle_b + |0\rangle_a|2_V\rangle_b - |0\rangle_a|2_H\rangle_b).} \quad (4.65)$$

4.4.3 Caso 3: Ação do divisor de feixe sobre $|\Psi^+\rangle$

O estado $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle + |HV\rangle)$ leva a:

$$\text{BS}|\Psi^+\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(a_V^\dagger a_H^\dagger + b_V^\dagger b_H^\dagger \right) |0\rangle.$$

Ou seja, temos:

$$\boxed{\text{BS}|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_V 1_H\rangle_a |0\rangle_b + |0\rangle_a |1_V 1_H\rangle_b).} \quad (4.66)$$

4.4.4 Caso 4: Ação do divisor de feixe sobre $|\Psi^-\rangle$

Como $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VH\rangle - |HV\rangle)$, o resultado é:

$$\text{BS}|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_V^\dagger b_H^\dagger - a_H^\dagger b_V^\dagger \right) |0\rangle.$$

Isto é,

$$\boxed{\text{BS}|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_V\rangle_a |1_H\rangle_b - |1_H\rangle_a |1_V\rangle_b).} \quad (4.67)$$

Este estado corresponde à situação em que um fóton é detectado em cada saída do divisor de feixe (caminhos distintos). Apenas neste caso isso ocorre e foi esse fato que permitiu a medição do estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ no experimento de 1997 [8].

4.4.5 Interpretação Física e Medida de Bell Parcial

A análise dos quatro casos revela a limitação fundamental da óptica linear:

- **Casos $|\Phi^\pm\rangle$:** Ambos produzem *bunching* (dois fótons no mesmo modo de saída) com polarizações **iguais**. Não é possível distingui-los apenas pela contagem de fótons e polarização nos detectores. Estes eventos não permitem identificar univocamente o estado de Bell medido.
- **Caso $|\Psi^+\rangle$:** Produz dois fótons no mesmo modo de saída, porém com polarizações **diferentes** (um *H* e um *V*).
- **Caso $|\Psi^-\rangle$:** Produz um fóton em cada saída do divisor de feixe (um fóton no detector 1 e um no detector 2).

A assinatura experimental típica é:

- Detecção de coincidências (um fóton em cada detector) $\rightarrow$ projeta sobre $|\Psi^-\rangle$.

- Detecção de dois fótons em um único detector com polarizações ortogonais
→ projeta sobre $|\Psi^+\rangle$.

Os casos $|\Phi^\pm\rangle$ são indistinguíveis entre si em experimentos que fazem uso do divisor de feixe.

4.4.6 Estado Total Após o Beam Splitter

O estado completo após a ação do divisor de feixe é:

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2} \left[BS|\Phi^+\rangle \otimes (\alpha|V\rangle + \beta|H\rangle) + BS|\Phi^-\rangle \otimes (\alpha|V\rangle - \beta|H\rangle) \right. \\ \left. + BS|\Psi^+\rangle \otimes (\alpha|H\rangle + \beta|V\rangle) + BS|\Psi^-\rangle \otimes (\alpha|H\rangle - \beta|V\rangle) \right]. \quad (4.68)$$

Substituindo as expressões para $BS|\Phi^\pm\rangle, BS|\Psi^\pm\rangle$ e agrupando os termos, obtemos:

$$|\psi'\rangle = \frac{i\alpha}{2} |2_V\rangle_a |0\rangle_b |1_H\rangle_B - \frac{i\beta}{2} |2_H\rangle_a |0\rangle_b |1_V\rangle_B \\ + \frac{i\alpha}{2} |0\rangle_a |2_V\rangle_b |1_H\rangle_B - \frac{i\beta}{2} |0\rangle_a |2_H\rangle_b |1_V\rangle_B \\ - \frac{i}{2\sqrt{2}} |1_V, 1_H\rangle_a |0\rangle_b (\alpha|1_V\rangle_B - \beta|1_H\rangle_B) \\ - \frac{i}{2\sqrt{2}} |0\rangle_a |1_V, 1_H\rangle_b (\alpha|1_V\rangle_B - \beta|1_H\rangle_B) \\ - \frac{1}{2\sqrt{2}} |1_V\rangle_a |1_H\rangle_b (\alpha|1_V\rangle_B + \beta|1_H\rangle_B) \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} |1_H\rangle_a |1_V\rangle_b (\alpha|1_V\rangle_B + \beta|1_H\rangle_B). \quad (4.69)$$

A Eq. (4.69) representa o estado dos três fótons após os dois fótons com Alice atravessarem o divisor de feixe. O subíndice “B” representa o fóton com Bob.

4.4.7 Probabilidades e Eficiência do Protocolo

Observando a Eq. (4.69), existem oito possibilidades de detecção relevantes. Os quatro termos correspondentes aos estados $|\Phi^\pm\rangle$ (dois fótons no mesmo caminho com mesma polarização) ocorrem com probabilidade total de $1/2$. Nestes casos, o protocolo **não funciona**. Detectar dois fótons com mesma polarização no mesmo caminho pode corresponder tanto a $|\Phi^+\rangle$ quanto a $|\Phi^-\rangle$. Com isso, os estados com Bob nestes cenários não podem ser corrigidos por transformações unitárias para nos dar $\alpha|1_V\rangle_B + \beta|1_H\rangle_B = \alpha|V\rangle_B + \beta|H\rangle_B$, o estado do qubit original teleportado por Alice.

Os quatro termos restantes correspondem a detectar $|\Psi^\pm\rangle$. Eles ocorrem com probabilidade total de $1/2$. Nestes casos, o teletransporte é bem-sucedido após comunicação clássica e a correção unitária feita por Bob:

- Medida de $|\Psi^-\rangle$ (um fóton em cada detector): Bob já possui o estado desejado (fase global irrelevante).
- Medida de $|\Psi^+\rangle$ (dois fótons com polarizações diferentes no mesmo detector): Bob deve aplicar σ_z .

No experimento pioneiro do grupo de Zeilinger [8], não era possível identificar a polarização dos fótons quando dois deles chegavam no mesmo detector. Portanto, apenas o caso $|\Psi^-\rangle$ (coincidências entre detectores) era identificável, correspondendo a uma taxa de sucesso de 25%. Para atingir o limite teórico de 50% com óptica linear, é necessário distinguir se dois fótons no mesmo modo/caminho/detector possuem polarizações iguais ou diferentes. Por exemplo, precisamos utilizar detectores que são capazes de medir o número exato de fótons bem como suas polarizações.

Veja a Tabela 4.1 para um resumo dos casos em que temos sucesso e fracasso ao realizar medidas de Bell usando apenas um divisor de feixe.

Medida	Assinatura experimental	Protocolo funciona?
$ \Phi^+\rangle$	2 fótons no mesmo detector; mesma polarização	Não (indistinguível de $BS \Phi^-\rangle$)
$ \Phi^-\rangle$	2 fótons no mesmo detector; mesma polarização	Não (indistinguível de $BS \Phi^+\rangle$)
$ \Psi^+\rangle$	2 fótons no mesmo detector; polarizações diferentes	Sim (necessária correção σ_z)
$ \Psi^-\rangle$	1 fóton em cada detector; polarizações diferentes	Sim (sem correção)

Tabela 4.1: Resumo das quatro medidas parciais de Bell com divisor de feixe.

4.5 Correções unitárias de Bob

Como vimos anteriormente, após a medição de Bell realizada por Alice e após ser informado sobre o resultado dessa medida, Bob necessita aplicar uma **correção unitária** ao seu qubit para finalizar o protocolo. São quatro operações distintas que ele deve saber implementar, a depender do estado de Bell medido por Alice:

$$I, \quad \sigma_x, \quad \sigma_z, \quad \sigma_z \sigma_x, \quad (4.70)$$

onde σ_x e σ_z são as portas de Pauli X e Z , respectivamente. Além disso, I representa a operação identidade, isto é, Bob não precisa fazer nada caso um certo estado de Bell seja medido por Alice.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar como essas correções são implementadas experimentalmente quando lidamos com estados de polarização de fótons para codificar os qubits. Veremos que por meio de **placas de meia onda** [(*half-wave plates* (HWP))] podemos implementar as portas X e Z .

4.5.1 Qubits fotônicos e as portas lógicas X e Z

Conforme já discutido na seção anterior, utilizamos estados de polarização de fótons para codificar nosso qubit. Isto é,

$$|0\rangle \equiv |V\rangle \quad \text{e} \quad |1\rangle \equiv |H\rangle, \quad (4.71)$$

onde $|H\rangle$ representa um fóton com polarização horizontal e $|V\rangle$ um fóton com polarização vertical.

Um estado arbitrário descrevendo a polarização de um fóton pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \alpha |V\rangle + \beta |H\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (4.72)$$

Ou seja, podemos ter uma superposição coerente entre os estados $|V\rangle$ e $|H\rangle$, os quais constituem uma base no espaço vetorial complexo de dimensão dois.

Na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, a representação matricial das portas de Pauli são:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

A porta σ_x troca os estados da base computacional:

$$\sigma_x |0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma_x |1\rangle = |0\rangle. \quad (4.75)$$

Na notação de estados de polarização de fótons:

$$\boxed{\sigma_x |V\rangle = |H\rangle, \quad \sigma_x |H\rangle = |V\rangle.} \quad (4.76)$$

Por sua vez, a porta σ_z inverte o sinal de estado $|1\rangle$:

$$\sigma_z |0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_z |1\rangle = -|1\rangle. \quad (4.77)$$

Ou equivalentemente,

$$\boxed{\sigma_z |V\rangle = |V\rangle, \quad \sigma_z |H\rangle = -|H\rangle.} \quad (4.78)$$

4.5.2 Placas de meia onda e as portas X e Z

Uma **placa de meia onda** (HWP) é um componente óptico birrefringente que introduz uma diferença de fase de exatamente 180° (π radianos) entre o “eixo rápido” e o “eixo lento”, os quais correspondem a duas direções ortogonais. Essa diferença de fase equivale a um atraso de meio comprimento de onda entre um eixo e outro.

Quando a luz polarizada incide na placa de meia onda, podemos analisar o que ocorre com a direção da polarização da luz decompondo seu vetor polarização em duas componentes vetoriais: uma projetada sobre o eixo rápido e outra sobre o eixo lento. Como os índices de refração são diferentes para luz polarizada ao longo dos eixos rápido e lento, uma componente viaja mais rápido (eixo rápido) e a outra mais devagar (eixo lento). Assim, fabricando uma placa de meia onda com uma espessura sob medida para uma determinada cor específica (comprimento de onda), podemos obter um atraso de fase de π radianos entre uma componente e outra.

Matematicamente, modelamos a ação da placa de meia onda utilizando a notação introduzida na Sec. 4.2 para representar um feixe de luz monocromático (comprimento de onda λ e frequência ν bem definidos). O campo elétrico de um feixe de luz monocromático, propagando-se na direção z e com polarização orientada na direção $\hat{n}$ pode ser assim representado [10],

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{n}. \quad (4.79)$$

Aqui, E_0 é a amplitude do campo elétrico (seu máximo valor), $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi\nu$. Além disso, como a direção de propagação da luz é sempre ortogonal a sua polarização [10], então $\hat{n}$ é um vetor que pertence ao plano xy .

Se o vetor polarização $\hat{n}$ estiver na mesma direção do eixo rápido da placa de meia onda ($\hat{n} //$ eixo rápido), temos o seguinte campo elétrico do outro lado da placa,

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{n} \longrightarrow \vec{E}' = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi) \hat{n}. \quad (4.80)$$

Aqui φ é o atraso de fase devido a luz se propagar a uma velocidade diferente da velocidade da luz no vácuo ao atravessar o cristal. Caso a luz não encontrasse a placa de meia onda, teríamos $\varphi = 0$.

Por outro lado, se o vetor polarização $\hat{n}$ estiver na mesma direção do eixo lento da placa de meia onda ($\hat{n} //$ eixo lento), temos o seguinte campo elétrico do outro lado da placa,

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{n} \longrightarrow \vec{E}'' = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi + \pi) \hat{n}. \quad (4.81)$$

Agora, além de φ temos mais um atraso de π radianos, devido a velocidade de propagação da luz ao longo do eixo lento ser ainda mais devagar do que ao longo do eixo rápido.

Usando a representação complexa [10], temos para os dois casos:

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{n} \longrightarrow \vec{E}' = E_0 e^{i(kz - \omega t + \varphi)} \hat{n}, \quad \hat{n} // \text{ eixo rápido}, \quad (4.82)$$

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{n} \longrightarrow \vec{E}'' = E_0 e^{i(kz - \omega t + \varphi + \pi)} \hat{n}, \quad \hat{n} // \text{ eixo lento}. \quad (4.83)$$

Como uma fase global comum não afeta os estados quânticos, podemos suprimir $e^{i\varphi}$ (ou simplesmente definir $\varphi = 0$). E como $e^{i(kz-\omega t+\pi)} = e^{i(kz-\omega t)}e^{i\pi} = -e^{i(kz-\omega t)}$, verificamos que **ao longo do eixo lento temos efetivamente um sinal negativo**. No caso em que $\varphi = 0$, fisicamente isso corresponde a um vetor polarização apontando na direção oposta àquela que ele apontaria caso não houvesse a placa de meia onda ao longo do caminho.

Dessa forma, se convencionamos que o eixo rápido corresponde à direção vertical (eixo y) e o eixo lento à direção horizontal (eixo x), temos, pois, após a placa de meia onda:

$$|V\rangle \longrightarrow |V\rangle, \quad \hat{n} // \text{ eixo rápido}, \quad (4.84)$$

$$|H\rangle \longrightarrow -|H\rangle, \quad \hat{n} // \text{ eixo lento}. \quad (4.85)$$

As duas últimas equações correspondem exatamente à ação da porta Z nos estados-base $\{|V\rangle, |H\rangle\}$. Portanto, pelo princípio da superposição, ao enviarmos um estado arbitrário a uma placa de meia onda com seu eixo rápido alinhado com a direção vertical temos do outro lado da placa:

$$|\psi\rangle = \alpha |V\rangle + \beta |H\rangle \longrightarrow \alpha |V\rangle - \beta |H\rangle. \quad (4.86)$$

A Eq. (4.86) é o comportamento esperado da ação da porta Z (ou σ_z) sobre um estado arbitrário. Ou seja, provamos o seguinte resultado:

A porta de Pauli σ_z é implementada por uma placa de meia onda com seu eixo rápido orientado na direção vertical.

Vejam os que ocorre, agora, se a placa de meia onda tem seu eixo rápido girado de 45° ($\pi/4$ radianos) no sentido horário. Para descobrir como a polarização vertical (horizontal) é alterada, precisamos calcular suas componentes na direção do eixo rápido e lento. Se $\hat{r}$ e $\hat{l}$ são os versores que dão as direções dos eixos rápido e lento e se $\hat{n}_v$ ($\hat{n}_h$) representa o versor da direção vertical (horizontal), temos (veja a Fig. 4.3):

$$\hat{n}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} - \hat{l}), \quad (4.87)$$

$$\hat{n}_h = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{l}). \quad (4.88)$$

Como a componente da polarização na direção do eixo lento adquire um sinal menos, após a placa de meia onda obtemos:

$$\hat{n}_v \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{l}) = \hat{n}_h, \quad (4.89)$$

$$\hat{n}_h \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} - \hat{l}) = \hat{n}_v. \quad (4.90)$$

Isto é, uma polarização vertical torna-se horizontal e vice-versa.

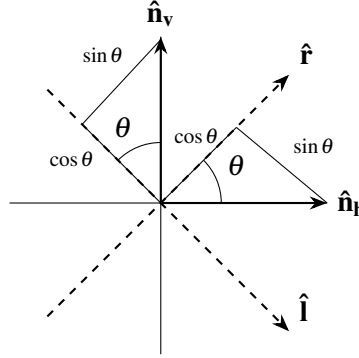


Figura 4.3: Um vetor de módulo um apontando na direção vertical $\hat{n}_v$ tem componentes $\sin \theta$ na direção $\hat{f}$ e $-\cos \theta$ na direção $\hat{i}$. Isto é, $\hat{n}_v = \sin \theta \hat{f} - \cos \theta \hat{i}$. E como $\cos \theta = \sin \theta = 1/\sqrt{2}$ se $\theta = 45^\circ$, temos que $\hat{n}_v = (\hat{f} - \hat{i})/\sqrt{2}$. Analogamente, um vetor de módulo um apontando na direção horizontal $\hat{n}_h$ tem componentes $\cos \theta$ na direção $\hat{f}$ e $\sin \theta$ na direção $\hat{i}$. Logo, para $\theta = 45^\circ$ temos $\hat{n}_h = (\hat{f} + \hat{i})/\sqrt{2}$.

Na notação de estados quânticos temos

$$|V\rangle \longrightarrow |H\rangle, \quad \hat{n}_v \text{ a } 45^\circ \text{ com o eixo rápido}, \quad (4.91)$$

$$|H\rangle \longrightarrow |V\rangle, \quad \hat{n}_h \text{ a } -45^\circ \text{ com o eixo rápido}. \quad (4.92)$$

Note que estamos tomando o eixo rápido como referência, a partir do qual medimos o ângulo. E usamos a convenção de que um ângulo positivo é medido no sentido anti-horário e um ângulo negativo é medido no sentido horário.

As duas últimas equações correspondem à ação da porta X nos estados-base $\{|V\rangle, |H\rangle\}$. Logo, pelo princípio da superposição, ao enviarmos um estado arbitrário a uma placa de meia onda com seu eixo rápido girado no sentido horário de 45° em relação à direção vertical, temos, do outro lado da placa,

$$|\psi\rangle = \alpha |V\rangle + \beta |H\rangle \longrightarrow \alpha |H\rangle + \beta |V\rangle. \quad (4.93)$$

A Eq. (4.93) é o comportamento esperado da ação da porta X (ou σ_x) sobre um estado arbitrário de polarização de um fóton. Ou seja, provamos o seguinte resultado:

A porta de Pauli σ_x é implementada por uma placa de meia onda com seu eixo rápido formando um ângulo de 45° com relação à direção vertical.

Para implementarmos a porta ZX (ou $\sigma_z \sigma_x$) basta usarmos duas placas de meia onda. A primeira delas, com o eixo rápido formando 45° com a vertical, implementa a porta X e, em seguida, o fóton passa por uma placa de meia onda com eixo rápido coincidindo com a direção vertical. Esta última placa implementa a porta Z .

A Fig. 4.4 retrata detalhadamente todas as etapas do experimento do teletransporte quântico realizado em 1997 [8]. Em particular, representamos exatamente

onde ocorre a medida de Bell via um divisor de feixe e também onde se deve implementar as correções unitárias por meio de uma placa de meia onda.

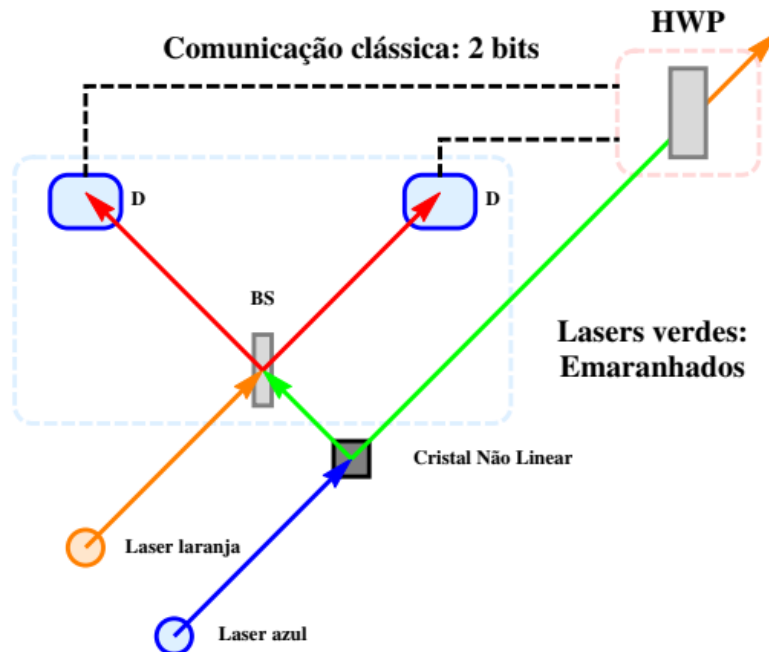


Figura 4.4: Representação esquemática da primeira realização experimental do protocolo de teletransporte. A notação e o significado dos elementos vistos nesta figura são os mesmos da Fig. 4.1. Agora, no entanto, detalhamos como ocorrem a medida de Bell e a correção do qubit com Bob. O fóton que será teleportado (laser laranja) e um dos fótons do par emaranhado (feixe verde à esquerda) incidem num divisor de feixe [beam splitter (BS)]. Se os dois fótons que emergem do outro lado seguem caminhos distintos, sendo detectados pelos detectores D, isso significa que medimos o estado de Bell $|\Psi^-\rangle$. No topo, à direita da figura, vemos um placa de meia onda [half wave plate (HWP)], representando uma das possíveis correções unitárias que Bob deve implementar em seu fóton. Figura e legenda extraídas da Ref. [9].

Capítulo 5

Conclusão

A mecânica quântica constitui uma das teorias mais bem-sucedidas da Física moderna, embora seus conceitos frequentemente apresentem elevado grau de abstração e complexidade matemática. Nesse contexto, este trabalho teve como principal objetivo tornar acessíveis alguns dos fundamentos da teoria da informação quântica para estudantes do ensino médio, utilizando como tema central o protocolo de teletransporte quântico em sistemas de dois níveis, conhecidos como qubits.

Inicialmente, foram apresentados os conceitos fundamentais necessários para a compreensão do fenômeno, incluindo a descrição matemática dos estados quânticos, o formalismo de vetores de estado, o princípio da superposição e o fenômeno do emaranhamento quântico.

Posteriormente, foi analisado o protocolo de teletransporte quântico, demonstrando-se como um estado quântico arbitrário pode ser “teleportado” de um local a outro utilizando um canal clássico de comunicação e um par de partículas previamente emaranhadas. A descrição matemática do protocolo evidenciou o papel fundamental das medidas na base de Bell e das correções unitárias realizadas pelo receptor para a reconstrução do estado original.

Além disso, foram discutidos elementos experimentais relevantes para a implementação de protocolos de informação quântica, tais como divisores de feixe, interferência quântica e o efeito Hong-Ou-Mandel. Esses fenômenos ilustram como princípios fundamentais da mecânica quântica podem ser observados e explorados em sistemas físicos reais.

Os resultados apresentados demonstram que, apesar da sofisticação matemática envolvida, é possível introduzir conceitos avançados da informação quântica de forma gradual e acessível. Dessa maneira, o trabalho contribui para a divulgação científica e para o despertar do interesse de estudantes por áreas contemporâneas da Física, especialmente aquelas relacionadas à computação quântica, criptografia quântica e tecnologias emergentes baseadas em fenômenos quânticos.

Por fim, espera-se que este estudo sirva como material introdutório para futuras investigações sobre informação quântica, incentivando o aprofundamento em tópicos mais avançados e contribuindo para a formação de novos pesquisadores interessados na compreensão dos fundamentos e das aplicações da mecânica quântica.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Shankar, Principles of Quantum Mechanics (Plenum Press, New York, 1980).
- [2] G. Benenti, G. Casati e G. Strini, Principles of Quantum Computation and Information, Vol. 1: Basic Concepts (World Scientific, Singapore, 2004).
- [3] C. H. Bennett e G. Brassard, Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, pags. 175-179, IEEE, New York, 1984. Bangalore, India, Dezembro de 1984.
- [4] D. Deutsch e R. Jozsa, Rapid solution of problems by quantum computation, Proc. R. Soc. London A **439**, 553 (1992).
- [5] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Press, Los Alamitos, CA, 1994.
- [6] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- [7] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [8] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Experimental quantum teleportation, Nature (London) **390**, 575 (1997).
- [9] C. C. C. dos Santos e G. Rigolin, Tomografia de estados quânticos e o teletransporte: dois lados da mesma moeda, artigo submetido para publicação.
- [10] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, (Prentice Hall, New Jersey, 1999).